



# Topología de singularidades de hipersuperficies: Número de Milnor e invariantes polares.

TESIS DOCTORAL

dirigida por el Profesor Ignacio Luengo  
de la Universidad Complutense de Madrid  
y presentada por

*D. Alejandro Melle Hernández*

para obtener el grado de Doctor en Matemáticas.

21.129

MADRID, 1996



Archivo

*A Alejandra, Julia  
Manoli y Ramón.*

## AGRADECIMIENTOS

En primer lugar quiero agradecer a Ignacio Luengo su inestimable labor de lazarillo a través del apasionante tema de las singularidades. Su interpretación geométrica de los problemas algebraicos ha hecho grata e interesante la elaboración de esta memoria.

No quiero pasar por alto la labor en la sombra de Enrique Artal de quien espero haber aprendido esa manera sencilla y maravillosa de hacer matemáticas.

Quiero agradecer a Sabir Gusein-Zade el interés que desde el primer momento mostró en el trabajo realizado, a Antonio Campillo además de por sus ilustrativas conversaciones, por el apoyo a las iniciativas de los jóvenes doctorandos. A José Manuel Aroca y Julio Castellanos por haber accedido a formar parte del tribunal.

Agradecimiento también para Maria Emilia Alonso, Enrique Arrondo, José Manuel Gamboa y Jesús Ruiz por las enriquecedoras conversaciones que con ellos he mantenido.

Es de agradecer el fenomenal ambiente personal y de trabajo que existe entre los miembros del Departamento de Álgebra. Quiero recordar a José Enrique Marcos, a José Ignacio Cogolludo y a Javier Cirre, con quienes he compartido tanto trivialidades matemáticas como problemas de la vida real.

Un agradecimiento muy especial para mi familia: mis padres, Katia, Natalia, Sonia, Mónica, la abuela, Teresa, Enrique, Jesús y en particular para Julia, que siempre ha tenido una sonrisa cuando ha hecho falta, y para Alejandra, por que sin ella no hubiera sido posible la consecución de este trabajo.

# Introducción

Al estudiar las singularidades, tanto de funciones analíticas como de variedades, los primeros objetos que se consideran, de manera natural, son los gérmenes de hipersuperficies y, en particular, los que poseen un punto singular aislado. En este sentido y desde el punto de vista topológico, uno de los pilares en el desarrollo de la teoría constituye el Teorema de Fibración de Milnor y sus consecuencias, [Milnor].

Consideremos  $f : U \subset \mathbb{C}^{n+1} \rightarrow \mathbb{C}$  una función analítica,  $U$  entorno abierto del origen,  $f(0) = 0$ , con un único punto crítico en  $U$ . Llamaremos  $(V, 0)$  al germen de hipersuperficie definido por los ceros de  $f$ . Si  $B_\epsilon$  es una bola abierta de  $\mathbb{C}^{n+1}$  de radio  $\epsilon$  suficientemente pequeño y  $S_\epsilon$  la esfera borde de  $B_\epsilon$ , entonces el "halo" de la singularidad  $K_V := S_\epsilon \cap V$  es una variedad diferenciable compacta sin borde de dimensión  $2n - 1$ . Milnor muestra que  $(V, 0)$  es homeomorfo (no difeomorfo) al cono real sobre  $K_V$  con vértice el origen. Por otro lado la fibra de Milnor  $F_f = \{z \in B_\epsilon : f(z) = \delta\}$  es una variedad diferenciable real abierta de dimensión  $2n$  cuyo borde es  $K_V$  y que tiene el mismo tipo de homotopía que un ramillete de  $n$ -esferas reales. El número de esferas de este ramillete se llama número de Milnor de  $(V, 0)$ , y se denota por  $\mu(V, 0)$ .

La descripción del par  $(S_\epsilon, K_V)$  en el caso de curvas,  $n = 1$ , es clásica. De hecho  $K_V$  es una variedad diferenciable compacta de dimensión uno que es unión disjunta de  $r$  círculos, uno por cada componente irreducible de  $V$ . Cada componente conexa  $K_i$  de  $K$  es un nudo en  $S^3$  y  $K$  es un enlace. Los nudos  $K_i$  se describen algebraicamente en función del desarrollo de Puiseux de la rama correspondiente, y los números de enlace entre  $K_i$  y  $K_j$  se corresponden con la multiplicidad de intersección en el origen entre la correspondientes ramas  $V_i$  y  $V_j$ , [B-K]. Ya para superficies la teoría dista mucho de estar acabada.

Desde el punto de vista de la topología, quedan aún abiertos dos problemas centrales.

El primero de ellos, conocido como "conjetura sobre la multiplicidad de Zariski", planteado en 1971, [Zariski], se refiere a la relación que existe entre la topología del par  $(B_\epsilon, V)$  y la multiplicidad de  $V$  en el origen.

Se dice que dos gérmenes  $(V_1, x_1)$  y  $(V_2, x_2)$  de hipersuperficies de  $(\mathbb{C}^{n+1}, 0)$  con singularidades aisladas tienen el mismo tipo topológico si existen entornos abiertos  $U_1$  de  $x_1$  y  $U_2$  de  $x_2$  y un homeomorfismo  $\phi : U_1 \rightarrow U_2$  tales que  $\phi(V_1, x_1) = (V_2, x_2)$ . Con esta definición la "conjetura sobre la multiplicidad de Zariski" afirma que el tipo topológico determina la multiplicidad de la hipersuperficie. El resultado es conocido para gérmenes de curvas planas ya que la topología determina y es determinada por las ramas irreducibles de la curva y por las multiplicidades de intersección entre dichas ramas, en particular, la multiplicidad permanece constante. En el caso de que la aplicación  $\phi$  sea de clase  $C^1$ ,

Ephraim ha demostrado que la conjetura es cierta, [Ephraim].

Ni siquiera se conoce la respuesta de la conjetura de Zariski para una familia de hipersuperficies. Como el tipo topológico determina el número de Milnor, cabe preguntarse si en una familia analítica de hipersuperficies que tengan el mismo número de Milnor, la multiplicidad también permanece constante. Este problema sólo ha podido ser resuelto para el caso de singularidades cuasihomogéneas por Greuel, [Greuel], y por O'Shea, [O'Shea], y para determinadas familias de hipersuperficies con polígono de Newton no degenerado, [Oka]. Usando los resultados de Greuel, (o de O'Shea), Yau demostró la conjetura de Zariski para singularidades de superficies cuasihomogéneas, [Yau 1].

El segundo problema es la relación existente entre número de Milnor constante y tipo topológico constante para una familia analítica de hipersuperficies. De nuevo, para una familia de gérmenes de curvas planas el segundo problema está resuelto. Una buena referencia de este hecho es el artículo de Buchweitz y Greuel, así como todas las referencias que en él aparecen, [B-G]. Lê y Ramanujam, en [L-R], muestran que si  $n > 2$ , cualquier familia analítica de hipersuperficies con número de Milnor constante tiene el mismo tipo topológico.

Así, para hipersuperficies de dimensión 2, i.e. superficies, ambos problemas permanecen abiertos.

Si  $\{(V_t, 0)\}_{t \in \mathbb{C}}$  es una familia analítica de gérmenes de superficies de  $\mathbb{C}^3$  con  $\mu(V_t, 0)$  independiente de  $t$ , ¿tienen las superficies  $(V_t, 0)$  el mismo tipo topológico?

Neumann, [Neumann], muestra que el halo  $K_V$  es una variedad real compacta cuyo tipo topológico orientado determina y es determinado por el grafo dual  $\Gamma$  de una resolución determinada canónicamente  $\pi : (M, D) \rightarrow (V, 0)$ . Con el resultado de Neumann se puede estudiar la topología de una familia en función de la resolución. Teissier en [Teissier 3] utiliza diferentes nociones de resolución simultánea de superficies que permiten estudiar la topología de las singularidades de la familia. Por otro lado, Laufer obtiene una fórmula para el número de Milnor relacionando este invariante topológico con invariantes analíticos obtenidos de la resolución, [Laufer].

Como se ha visto, los problemas anteriores están totalmente relacionados con el cálculo del número de Milnor en una familia. En la mayoría de los ejemplos interesantes de familias con número de Milnor constante, similares al de Briançon y Speder, [B-S 1], la familia obtenida no tiene sólo el número de Milnor constante sino que generalmente es cuasihomogénea o cumple condiciones de no degeneración respecto al polígono de Newton.

El propósito de esta memoria es obtener fórmulas para el cálculo del número de Milnor de  $(V, 0)$  en función de la geometría de las hipersuperficies de  $\mathbb{P}^n$  definidas por los ceros de los polinomios homogéneos que aparecen en el desarrollo en serie de  $f$  en el origen. Estas fórmulas se obtienen relacionando el número de Milnor de la singularidad  $(V, 0)$  con el número de Milnor (generalizado) de la hipersuperficie  $\tilde{V}$  que se obtiene de  $V$  al realizar la transformación cuadrática con centro el punto singular. El hecho de que aparezca un el número de Milnor generalizado es debido a que al realizar la transformación cuadrática  $\tilde{V}$  no tienen por qué aparecer sólo singularidades aisladas.

Escribamos  $f = f_d + f_{d+k} + \dots$  la descomposición de  $f$  como suma de sus componentes homogéneas no nulas. Sea  $D := \mathcal{Z}(f_d)$ , respec.  $T := \mathcal{Z}(f_{d+k})$ , la hipersuperficie de  $\mathbb{P}^n$

definida por los ceros de  $f_d$ , respec.  $f_{d+k}$ .

En el caso de superficies y cuando  $k = 1$ , Luengo, [Luengo], llamó superficies superaisladas a aquellas singularidades que verificasen que

$$\text{Sing}(D) \cap T = \emptyset, (*)$$

y dio un ejemplo de singularidad superaislada donde el estrato  $\mu$ -constante de la deformación universal no era liso. Por otro lado, Artal, [Artal], estudiando la topología de las superficies superaisladas encontró un contraejemplo a la conjetura de Yau, [Yau 2]: el tipo topológico no está determinado por  $V \cap S_\epsilon$  y por el polinomio característico de la monodromía compleja.

Las superficies superaisladas son un caso particular de las singularidades que verifican la condición  $(*)$  para cualquier  $n$  y para cualquier  $k$ . El estudio de este tipo de singularidades surgió a partir de los artículos de Yomdin, [Yomdin], y Lê, [Lê 3], sobre hipersuperficies con lugar singular de dimensión uno. Para este tipo de singularidades se han calculado bastantes invariantes topológicos de  $(V, 0)$  en función de  $D$  y de  $T$ : la monodromía compleja, [Siersma], los invariantes polares, [L-M], el espectro de la singularidad, [Saito]. La condición  $(*)$  implica que  $D$  es una hipersuperficie de  $\mathbb{P}^n$  con singularidades aisladas. En particular si  $n > 2$ ,  $D$  debe ser necesariamente irreducible y cuando  $n = 2$ ,  $D$  es una curva plana proyectiva reducida. El número de Milnor se puede calcular mediante la fórmula, [L-M]:

$$\mu(V, 0) = (d - 1)^{n+1} + k \sum_{P \in \text{Sing}(D)} \mu(D, P).$$

En esta memoria se consigue debilitar la condición  $(*)$  de dos maneras:

- (a) Suponer que  $D$  es una hipersuperficie con singularidades aisladas y no imponer ninguna condición sobre  $T$ .
- (b) Estudiar superficies donde  $D$  sea una curva plana con componentes múltiples.

Más concretamente el contenido de cada capítulo es el siguiente.

En el primer capítulo se obtiene una fórmula para calcular la característica de Euler-Poincaré (compleja) de la fibra de Milnor de un germen de curva plana con singularidades no aisladas,  $C = \sum_{i=1}^r q_i C_i$ . La fórmula expresa la característica en términos de las multiplicidades de intersección de las ramas irreducibles en el origen  $(C_i, C_j)_0$ , de los números de Milnor de las componentes irreducibles  $\mu(C_i, 0)$  y de las multiplicidades  $q_i$ , del siguiente modo:

$$\chi(F) = - \sum_{i=1, i < j}^{r-1} (C_i, C_j)_0 (q_i + q_j) + (q_1 + \cdots + q_r) - \sum_{i=1}^r q_i \mu(C_i, 0).$$

Esta fórmula juega un papel central en el capítulo tercero pero dado que es un resultado nuevo de la teoría de curvas se ha puesto en un capítulo aparte.

La segunda parte de la memoria está dedicada al estudio de singularidades aisladas de hipersuperficies  $(V, 0)$  cuyo cono tangente (proyectivizado)  $D$  tiene singularidades aisladas. Para estas singularidades la transformada estricta  $\hat{V}$  de  $(V, 0)$  mediante la transformación

cuadrática de centro el origen tiene un número finito de puntos singulares  $\{\tilde{P}_1, \dots, \tilde{P}_s\}$ . Además estos puntos singulares están en biyección con los puntos singulares de  $D$ . Primero se demuestra que el tipo topológico del germen  $(V, 0)$  queda determinado por el jet de  $f$  de orden

$$d + \sup\{\mu(\tilde{V}, \tilde{P}_i) : i = 1, \dots, s\}.$$

También se da una fórmula de tipo Noether relacionando el número de Milnor de  $(V, 0)$  y la suma de los números de Milnor de  $\tilde{V}$  en los correspondientes  $\tilde{P}_i$ :

$$\mu(V, 0) = (d-1)^{n+1} + \sum_{P \in \text{Sing}(D)} \mu(D, P) + \sum_{\tilde{P}_i} \mu(\tilde{V}, \tilde{P}_i).$$

Usando la relación anterior se demuestra que una familia  $\{V_t\}$  de hipersuperficies con singularidades aisladas que sea equimúltiple y que tenga el número de Milnor constante tiene la familia de conos tangentes  $\{D_t\}$  con número de Milnor constante.

Otra aplicación de la relación de tipo Noether anterior es la fórmula para el número de Milnor de superficies bivalentes que tengan el cono tangente  $D$  reducido. Una superficie es bivalente si  $f$  es del tipo  $f_d + f_{d+k}$  y  $\text{Sing}(D) \cap \text{Sing}(T) = \emptyset$ . Si además  $D$  es reducida, el número de Milnor de  $(V, 0)$  es igual a

$$\mu(V, 0) = (d-1)^{n+1} + k\mu(D) + k \cdot \sum_{P \in \text{Sing}(D)} ((D, T)_P - 1),$$

donde  $(D, T)_P$  es la multiplicidad de intersección de  $D$  y  $T$  en  $P$ . En cuanto al orden de determinación del tipo topológico, para las singularidades bivalentes con cono tangente  $D$  reducido, éste está acotado por el siguiente número

$$d - 1 + k \cdot \sup\{(D, T)_P : P \in \text{Sing}(D) \cap T\}.$$

La última parte de la memoria está dedicada al estudio de las superficies bivalentes cuyo cono tangente (proyectivizado)  $D$  es una curva plana proyectiva con componentes múltiples. El ingrediente necesario para el estudio de estas superficies es el número de Milnor generalizado de Parusiński, [Parusiński]. Se vuelve a tener una relación entre el número de Milnor de  $(V, 0)$  y el número de Milnor generalizado de  $\tilde{V}$ , denotado por  $\mu(\tilde{V})$ :

$$\mu(V, 0) = (d-1)^3 + (\chi(D) - 3d + d^2) + \mu(\tilde{V}),$$

donde  $\chi(\cdot)$  es la característica de Euler-Poincaré. El cálculo del número de Milnor generalizado se puede hacer construyendo una estratificación de Whitney de  $\tilde{V}$  y estudiando la característica de Euler-Poincaré de la fibra de Milnor en cada estrato. La estrategia usada en la memoria ha sido estudiar singularidades para las cuales se puede encontrar una estratificación de Whitney adecuada: singularidades transversas. Si la descomposición de  $f$  es  $f_d + f_{d+k} + \dots$ , su lugar de ceros  $(V, 0)$  es una superficie transversa si verifica las siguientes dos condiciones:

- (i) La intersección de  $\text{Sing}(D_{\text{red}})$  y  $T$  es vacía.

- (ii) Para toda componente irreducible  $C_i$  de  $D$  tal que  $q_i > 1$ , las curvas  $C_i$  y  $T$  son transversas.

Se demuestra que las singularidades transversas son bivalentes, es decir, que el tipo topológico está determinado por  $f_d + f_{d+k}$ , el número de Milnor de una singularidad transversa es

$$\mu(V, 0) = (d - 1)^3 + k \cdot (\mu(D_{red}) + (d - p)(2d - 3 + p)) + k^2 \cdot (d - p).$$

donde  $p$  es el grado de la curva reducida  $D_{red}$ .

Para terminar con el estudio de las singularidades bivalentes se prueba un teorema que obtiene la diferencia entre los números de Milnor de dos singularidades bivalentes. Después se compara el número de Milnor de una singularidad bivalente cualquiera con el número de Milnor de una singularidad bivalente transversa. De este modo el número de Milnor de una superficie bivalente se calcula mediante la siguiente fórmula que generaliza todas las anteriores:

$$\mu(V, 0) = (d - 1)^3 + k \left\{ \chi(D) + d^2 - 3d + \sum_{P \in \text{Sing}(D) \cap T} ((D, T)_P - 1) \right\}.$$





# Contenido

<b>1</b>	<b>Fibra de Milnor de curvas planas</b>	<b>9</b>
1.1	Fibración de Milnor . . . . .	10
1.2	Singularidades aisladas . . . . .	11
1.3	Característica de Euler-Poincaré (compleja) de la fibra de Milnor . . . . .	18
<b>2</b>	<b>Cono tangente con singularidades aisladas</b>	<b>29</b>
2.1	Invariantes polares $(e_q, m_q)$ . . . . .	30
2.2	Familias de hipersuperficies . . . . .	43
2.3	Fórmula de Yomdin . . . . .	47
2.4	Singularidades bivalentes . . . . .	49
<b>3</b>	<b>Superficies bivalentes</b>	<b>57</b>
3.1	Número de Milnor generalizado . . . . .	57
3.2	Singularidades transversas . . . . .	62
3.3	Fórmulas de comparación . . . . .	77



# Capítulo 1

## Fibra de Milnor de curvas planas

Las singularidades de curvas planas forman la parte de la teoría de singularidades que más se ha desarrollado. Este desarrollo ha sido tanto a nivel local, con la geometría analítica, como en la situación global, con la geometría algebraica. El álgebra, el análisis, la geometría y la topología han arrimado el hombro para desarrollar la teoría de singularidades de curvas planas. Por este motivo es impensable que en este capítulo se pretenda, ni siquiera, hacer un resumen de esta teoría. A lo largo del capítulo sólo se va a tratar con la teoría local, es decir, con gérmenes de curvas planas.

En la primera sección se enumeran los teoremas de fibración de Milnor a los que se va a hacer referencia a lo largo de la memoria.

La segunda sección está dedicada a dar algunos resultados conocidos para gérmenes de curvas planas con singularidades aisladas. Sólo se darán los resultados que van a ser necesarios a lo largo de la memoria. Con el propósito de hacer la memoria lo más autocontenida posible, se ha intentado dar una demostración de la mayoría de estos resultados.

Sea  $f : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$  un germen de función analítica. Se puede ver  $f$  como un elemento del dominio de factorización única  $\mathbb{C}\{x, y\}$ . Sea  $f = f_1^{q_1} \cdots f_r^{q_r}$  la factorización de  $f$  en factores irreducibles. Sea  $(C, 0)$ , resp.  $(C_i, 0)$ , el germen de curva plana definido por la ecuación  $f = 0$ , resp.  $f_i = 0$ . Sea  $\epsilon > 0$  suficientemente pequeño y sea  $S_\epsilon^3$  la esfera de dimensión tres centrada en el origen y de radio  $\epsilon$ . El germen de curva  $C$  define un *multienlace*  $L := f^{-1}(0) \cap S_\epsilon^3$ , i.e. un *enlace* (una unión disjunta de círculos sumergidos en  $S_\epsilon^3$ ) con multiplicidades. Este *enlace*  $L$  está formado por  $r$  componentes, una por cada rama irreducible  $C_i$  de  $C$ . Además, el *enlace* determina el tipo topológico de  $C$ , para una demostración bastante elegante de este hecho ver el libro de Eisenbud y Neumann, [E-N]. Por otro lado, el Teorema de Fibración de Milnor, ver [Milnor] Theorem 4.8 y Theorem 6.1, prueba que la aplicación  $\frac{f}{|f|} : S_\epsilon^3 \setminus L \rightarrow S^1$  es una fibración  $C^\infty$  localmente trivial. Sea  $F$  la fibra tipo de esta fibración, la Fibra de Milnor. La sección segunda contiene el propósito fundamental de este capítulo: el cálculo de la característica de Euler-Poincaré (compleja) de la fibra de Milnor,  $F$ , de un germen de función analítica  $f$  de dos variables. El resultado buscado aparece en el Teorema de 1.3.9, donde se muestra que la característica de Euler-Poincaré de  $F$  se puede calcular sin más que conocer la descomposición de  $f$ , en el anillo de series convergentes  $\mathbb{C}\{x, y\}$ , en componentes irreducibles. De hecho, en el Corolario de 1.3.12, se demuestra que basta conocer una descomposición libre de cuadrados de  $f$ .

Aparte del interés que tenga por sí mismo el resultado anterior, el Teorema de 1.3.9 será crucial en la demostración del Teorema de 3.2.3 del último capítulo de esta memoria.

## 1.1 Fibración de Milnor

Sea  $B_\epsilon$  la bola abierta de  $\mathbb{C}^{n+1}$  de centro el origen y radio  $\epsilon$ , sea  $S_\epsilon$  la esfera que es borde de  $B_\epsilon$ . Sea  $\mathbb{D}_\eta$  el disco de  $\mathbb{C}$  centrado en el origen y de radio  $\eta$ .

Sea  $f : U \subset \mathbb{C}^{n+1} \rightarrow \mathbb{C}$  una función analítica definida en un entorno  $U$  del origen,  $f(0) = 0$ ,  $f \not\equiv 0$ . Sea  $V = \{z \in U : f(z) = 0\}$ .

Los resultados sobre la fibración de Milnor que se encuentran en [Milnor] para el caso de polinomios, son adaptados por D. Burghlea y A. Verone al caso de funciones analíticas cualesquiera sin más que dar un lema de selección de curva para conjuntos analíticos, ver [B-V]. De este modo se tiene el siguiente Teorema de Fibración, ver [Milnor] pág. 17, pág. 43, pág. 45.

**1.1.1. Teorema. Teorema de Fibración.** *Para cualquier función analítica  $f$  como la anterior existe  $\epsilon_0 > 0$  tal que para cualquier  $0 < \epsilon < \epsilon_0$  se tiene:*

(a) *La aplicación*

$$\begin{aligned} \phi : S_\epsilon \setminus V &\mapsto S^1 \\ z &\mapsto \frac{f(z)}{|f(z)|} \end{aligned}$$

*es una fibración diferenciable localmente trivial.*

(b) *Para cualquier  $\theta \in S^1$   $F_\theta := \phi^{-1}$  es una variedad diferenciable real de dimensión  $2n$ , paralelizable que tiene el tipo de homotopia de un CW-complejo finito de dimensión  $n$ .*

(c)  *$K_\epsilon := V \cap S_\epsilon$   $(n-2)$ -conexa. Además el tipo topológico de  $K_\epsilon$  no depende de  $\epsilon$ .*

Cada fibra  $F_\theta$  de esta fibración es difeomorfa a un subconjunto abierto de una hipersuperficie compleja lisa, este abierto es el formado por todos los  $z$  tales que  $|z| < \epsilon$  y  $f(z)$  es constante, obteniéndose otro modelo de la fibración anterior, [Milnor] pág. 53, Theorem 5.11.

**1.1.2. Teorema. Teorema de Fibración.** *Si  $0 < \eta \ll \epsilon$  entonces la aplicación*

$$\begin{aligned} f : \overline{B_\epsilon} \cap f^{-1}(\overline{\mathbb{D}_\eta}) \setminus V &\mapsto \overline{\mathbb{D}_\eta} - \{0\} \\ z &\mapsto f(z) \end{aligned}$$

*es una fibración diferenciable localmente trivial que es isomorfa a la fibración anterior.*

**1.1.3. Definiciones.** A cualquiera de estas fibraciones se le llama *fibración de Milnor de  $f$*  (en el origen) y a una fibra tipo de la fibración se le llama *fibra de Milnor de  $f$* .

Milnor prueba más resultados en el caso en que  $f$  tenga un punto crítico aislado en el origen, es decir cuando el origen sea el único punto que anula el jacobiano de  $f$ . En esta situación de un único punto crítico aislado, el Teorema de  $K$ -determinación de Mather,

ver [Mather] Theorem 3.5 y Theorem 9.2, asegura que existe un cambio analítico de coordenadas que convierte a  $f$  en un polinomio. Por tanto, cuando se tiene un único punto crítico se pueden usar todos los resultados de Milnor. Milnor demuestra que de hecho en este caso la fibra  $F$  es  $n - 1$  conexa y que tiene el tipo de homotopia de un ramillete finito de  $n$  esferas.

**1.1.4. Definición.** Al número de esferas del ramillete se le llama *número de Milnor* de  $f$ , y se denota por  $\mu$ , ó por  $\mu(V, 0)$ .

En particular, la homología reducida es trivial salvo en grado  $n$  donde vale  $\mathbb{Z}^\mu$ . Este invariante topológico de la función se puede calcular algebraicamente, ver [Orlik]:

$$\mu(V, 0) = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathbb{C}\{z_0, \dots, z_n\}}{(f_{z_0}, \dots, f_{z_n})}.$$

La notación  $\mu(V, 0)$  se debe a que, en realidad, el origen es un punto singular aislado del germen de conjunto  $V$  definido por los ceros de  $f$ . También se suele hablar de la fibración de Milnor de  $V$ , de la fibra de Milnor de  $V$ , el origen, independientemente de que  $V$  tenga al origen como único punto singular aislado.

En el caso de que la singularidad de  $V$  sea aislada se han calculado los números de betti de la fibra de Milnor y por tanto la característica de Euler-Poincaré de la fibra de Milnor  $F$  es

$$(1.1) \quad \chi(F) = 1 + (-1)^n \mu(V, 0).$$

## 1.2 Singularidades aisladas

Primero de todo reseñar una situación que va a ser común en esta memoria. A lo largo de toda la memoria va a ser necesario calcular la multiplicidad de intersección en puntos, generalmente el origen, entre gérmenes de curvas y gérmenes de hipersuperficies. Por esto motivo se fijan en este punto las siguientes definiciones y propiedades, todas ellas bien conocidas y que no necesitan demostración.

Sea  $\mathbb{C}\{z_0, \dots, z_n\}$  el anillo de series convergentes, sea  $\mathcal{I}$  un ideal de  $\mathbb{C}\{z_0, \dots, z_n\}$  tal que su lugar de ceros  $\gamma$  es un germen de curva irreducible en  $(\mathbb{C}^{n+1}, 0)$ . Sea  $f \in \mathbb{C}\{z_0, \dots, z_n\}$  tal que su lugar de ceros de  $V(f)$  y  $\gamma$  sólo tienen al 0 como punto en común, entonces la multiplicidad de intersección de  $\gamma$  y  $V(f)$  está definida por los siguientes números naturales, iguales entr sí todos ellos:

$$(\gamma, V(f))_0 := \text{long} \left( \frac{\mathcal{O}_\gamma}{(f)} \right) = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathbb{C}\{z_0, \dots, z_n\}}{\mathcal{I} + (f)} = \text{ord}_t(f \circ h(t)),$$

donde  $\mathcal{O}_\gamma$  es el anillo local de la curva,  $\text{long}$  denota la longitud del  $\mathcal{O}_\gamma$  módulo y  $h(t) : (\mathbb{C}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^{n+1}, 0)$  es una parametrización de la curva  $\gamma$ . Además, para otro  $g \in \mathbb{C}\{z_0, \dots, z_n\}$  se tiene

$$(\gamma, V(f \cdot g))_0 = (\gamma, V(f))_0 + (\gamma, V(g))_0.$$

Todos estos resultados se pueden encontrar por ejemplo en el libro de W. Fulton, [Fulton].

Sea  $(C, 0) \subset (\mathbb{C}^2, 0)$  un germen de curva plana con singularidad aislada en el origen. Sea  $f(x, y) = 0$  una ecuación del germen  $(C, 0)$ :  $f \in \mathbb{C}\{x, y\}$ . Como la singularidad es aislada,  $f$  es un germen de función sin factores cuadrados, es decir,  $f = f_1 f_2 \cdots f_r$ , donde cada  $f_i$  es un elemento irreducible en  $\mathbb{C}\{x, y\}$ . Las curvas  $C_i : f_i = 0$  son las componentes irreducibles ó ramas de  $C$  en el origen. Sea

$$f(x, y) = f_d(x, y) + \dots \text{ términos de grado mayor que } d$$

el desarrollo en serie de potencias de  $f$  en un entorno del origen  $U$  donde  $f$  converge. Se tiene que

$$d = \text{mult}_0(C) = \sum_{i=1}^r \text{mult}_0(C_i)$$

Por el lema de Hensel, ver [B-K] pág. 334, se sabe que, si  $f$  es irreducible, su forma inicial es potencia de una forma lineal, i.e.  $f_d(x, y) = (ax + by)^d$ . La recta  $ax + by = 0$  es la recta tangente a  $C$  en el origen. Si  $f$  no es irreducible, las rectas tangentes de cada rama son las rectas tangentes a  $C$  en el origen.

Sea  $l_i : a_i x + b_i y = 0$  la recta tangente de  $C_i$ . Se puede suponer que todos los  $a_i$  son distintos de cero, de modo que se define  $\alpha_i := b_i/a_i$ . Así, las ramas de  $(C, 0)$  se pueden agrupar según tengan, ó no, la misma tangente. Sea  $I_w$  el conjunto de enteros  $i$ ,  $1 \leq i \leq r$ , tal que  $\alpha_i = w$ . De este modo,  $(C, 0)$  admite una descomposición  $C = D_{\alpha_w} \cup \cdots \cup D_{\alpha_{w_k}}$ , donde cada (germen de) curva  $D_{\alpha_w}$  es unión de ramas irreducibles  $C_i$  de  $C$  que tienen la misma recta tangente.

**1.2.1. Definición.** A estas componentes  $D_{\alpha_w}$  se las llama *componentes tangenciales* de  $C$ .

Sea  $\pi : (\tilde{\mathbb{C}}^2, E) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$  la transformación cuadrática de  $(\mathbb{C}^2, 0)$  con centro el origen,  $E$  el divisor excepcional de  $\pi$ . Sea  $\tilde{C}$  la transformada estricta mediante  $\pi$  de  $C$ .

**1.2.2. Lema.** Cada una de las componentes tangenciales da un punto de intersección del divisor excepcional  $E$  con  $\tilde{C}$ .

*Demostración:* Cada componente tangencial  $D_{\alpha_w}$  tiene por ecuación

$$F_w(x, y) = \prod_{i \in I_w} f_i(x, y) = 0$$

Para cada  $i \in I_w$ , la forma inicial de  $f_i$  es  $(x + \alpha_w y)^{k_i}$ , por tanto se tiene que la forma inicial de  $F_w$  es  $(x + \alpha_w y)^{s_w}$ , es decir,

$$(1.2) \quad f_i(x, y) = (x + \alpha_w y)^{k_i} + f_{i, k_i+1}(x, y) + \cdots$$

$$(1.3) \quad F_w(x, y) = (x + \alpha_w y)^{s_w} + F_{w, s_w+1}(x, y) + \cdots$$

$$(1.4) \quad f(x, y) = \prod_{i=1}^k F_{w_i}(x, y)$$

Para estudiar  $E \cap C$  basta elegir la carta donde la aplicación  $\pi$  está dada por  $\pi(u, y) = (uy, y)$ . Sea  $\tilde{g}$  la transformada estricta de una función analítica cualquiera  $g \in \mathbb{C}\{x, y\}$ , i.e. se toma  $g \circ \pi$  y se divide por la mayor potencia de  $y$ . Las transformadas estrictas de las funciones analíticas (1.2), (1.3) y (1.4) son

$$\begin{aligned} \tilde{f}_i(u, y) &= (u + \alpha_w)^{k_i} + y f_{i, k_i+1}(u, 1) + \dots \\ (1.5) \quad \tilde{F}_w(u, y) &= (u + \alpha_w)^{s_w} + y F_{w, s_w+1}(u, 1) + \dots \end{aligned}$$

$$(1.6) \quad \tilde{f}(u, y) = \prod_{i=1}^k \tilde{F}_{w_i}(u, y)$$

Para cada  $i \in I_w$ ,  $\tilde{f}_i$  y  $\tilde{F}_w$  son elementos de  $\mathbb{C}\{u + \alpha_w, y\}$ . Denotamos igualmente por  $\widetilde{C}_i$  y  $\widetilde{D}_w$  los gérmenes de curvas que pasan por el punto  $P_w = (-\alpha_w, 0)$ , definidas por las ecuaciones  $\tilde{f}_i(u, y) = 0$  y  $\tilde{F}_w(u, y) = 0$ . Para terminar la demostración del lema basta observar que la transformada estricta  $\tilde{C}$  de  $C$  es

$$\tilde{C} = \bigcup_{i=1}^k \widetilde{D}_{w_i}.$$

□

Al ver las funciones analíticas (1.5) y (1.6), se tiene que

$$(1.7) \quad (\tilde{C}, E) = \sum_{i=1}^k (\widetilde{D}_{w_i}, E)_{P_w} = d = \text{mult}_0(C).$$

Por el Teorema de Preparación de Weierstrass, ver por ejemplo [B-K] pág. 338, cualquier germen de curva plana  $(C, 0)$ , tal que la recta  $y = 0$  no sea componente de  $(C, 0)$ , es el conjunto de ceros de un polinomio de Weierstrass

$$P(x, y) = x^d + a_1(y)x^{d-1} + \dots + a_d(y).$$

Si la curva  $(C, 0)$  no tiene componentes múltiples, el polinomio  $P$  tampoco las tiene. A partir de ahora vamos a suponer que el germen es singular, en particular  $d$  es mayor que uno.

**1.2.3. Proposición.** *Sea  $(Y, 0)$  el germen de curva plana definido por  $\frac{\partial P}{\partial x} = 0$ . En las condiciones anteriores se tiene que*

$$(C, Y)_0 = \mu(C, 0) + (L, C)_0 - 1$$

donde  $L$  denota el eje coordenado  $y = 0$  y  $\mu(C, 0)$  el número de Milnor de la singularidad  $(C, 0)$ .



*Demostración:* Sea  $Y = r_1 Y_1 + \cdots + r_s Y_s$  la descomposición de  $Y$  en componentes irreducibles. Sea  $c = (c_1, c_2) : (\mathcal{T}, 0) \rightarrow (Y_i, 0)$  una parametrización de Puiseux de la rama  $Y_i$ , donde  $\mathcal{T}$  es un entorno abierto conexo del origen en  $\mathbb{C}$ , con coordenada  $t$ . Por la definición de número de intersección, se tiene que  $(C, Y_i)_0 = \text{ord}_t(P \circ c)$ . Además,

$$\frac{\partial(P \circ c)}{\partial t} = \left(\frac{\partial P}{\partial x} \circ c\right) \cdot c'_1(t) + \left(\frac{\partial P}{\partial y} \circ c\right) \cdot c'_2(t).$$

Como  $Y_i$  es una componente de  $Y$  entonces  $(\frac{\partial P}{\partial x}) \circ c \equiv 0$ . De este modo,

$$\begin{aligned} \text{ord}_t(P \circ c) &= \text{ord}_t\left(\frac{\partial(P \circ c)}{\partial t}\right) + 1 = \text{ord}_t\left(\frac{\partial P}{\partial y} \circ c\right) + \text{ord}_t(c'_2(t)) + 1 \\ &= \text{ord}_t\left(\frac{\partial P}{\partial y} \circ c\right) + \text{ord}_t(y \circ c). \end{aligned}$$

Como  $d > 1$ , la recta  $y = 0$  no es una componente de  $Y$ . De este modo, la igualdad anterior, en función de los números de intersección, da la identidad

$$(C, Y_i)_0 = (Z, Y_i)_0 + (L, Y_i)_0,$$

donde  $Z$  es el germen  $\frac{\partial P}{\partial y} = 0$ . Multiplicando por los  $r_i$  y haciendo la suma, se obtiene

$$(C, Y)_0 = (Z, Y)_0 + (L, Y)_0.$$

Tal y como están definidos los gérmenes  $C, Y$  y  $L$  se tiene que

$$(L, Y)_0 = d - 1 = (L, C)_0 - 1.$$

La definición del número de Milnor,  $\mu(C, 0) = (Y, Z)_0$ , hace que se pueda concluir la demostración.  $\square$

Sea  $\pi : (\tilde{\mathbb{C}}^2, E) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$  la transformación cuadrática de  $(\mathbb{C}^2, 0)$  con centro el origen. Se necesitará la siguiente propiedad de los números de intersección de curvas planas, que de hecho vale para curvas sobre superficies no singulares. La demostración se puede encontrar por ejemplo en [B-K] pág. 518.

**1.2.4. Lema. Fórmula de Noether.** Sean  $(C, 0)$  y  $(D, 0)$  dos gérmenes de curvas planas, definidas en un entorno conexo  $U$  del origen de  $\mathbb{C}^2$ , de modo que,  $C \cap D = \{0\}$ . Sean  $\tilde{C}$  y  $\tilde{D}$  las transformadas estrictas de  $C$  y  $D$  mediante  $\pi$ . Entonces

$$(C, D)_0 = \sum_{x \in \tilde{C} \cap \tilde{D}} (\tilde{C}, \tilde{D})_x + \text{mult}_0(C) \text{mult}_0(D).$$

**1.2.5. Proposición.** Si  $(C, 0) \in (\mathbb{C}^2, 0)$  es un germen de curva plana con singularidad aislada en el origen y  $\pi : (\tilde{\mathbb{C}}^2, E) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$  la transformación cuadrática de centro el origen, entonces se tiene que

$$\mu(C, 0) = d(d - 1) + \sum_{i=1}^k \mu(\tilde{C}, \tilde{x}_i) - (k - 1)$$

donde  $\tilde{C}$  es la transformada estricta de  $C$ ,  $\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_k$  son los  $k$  puntos de  $\tilde{C} \cap E$  y  $d$  es la multiplicidad de  $C$  en  $0$ .

*Demostración:* Se puede suponer que, en un entorno  $U$  del origen,  $C$  está dada como el germen de ceros de un polinomio de Weierstrass

$$P(x, y) = x^d + a_1(y)x^{d-1} + \dots + a_d(y).$$

Además, sin más que hacer un cambio de coordenadas que afecte a la coordenada  $y$ , se puede suponer también que la recta  $y = 0$  no es tangente a  $(C, 0)$ , por lo que si  $L$  es el germen de recta definido por  $y = 0$ ,

$$(1.8) \quad \text{mult}_0(C) = (C, L)_0 = d.$$

Al realizar la transformación cuadrática, para estudiar  $E \cap C$  basta elegir la carta donde la aplicación  $\pi$  está dada por  $\pi(u, y_1) = (uy_1, y_1)$ . En esta situación se tiene que

$$(1.9) \quad \frac{\partial \tilde{P}}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial u}(\tilde{P}).$$

Sea de nuevo  $Y$  el germen de curva plana definido por  $\frac{\partial P}{\partial x} = 0$ . La transformada estricta  $\tilde{Y}$  de  $Y$  viene dada en esta carta por la función analítica (1.9). El divisor excepcional  $E$  tiene ecuación en esta carta  $\{y_1 = 0\}$ . Por la fórmula de Noether,

$$(1.10) \quad (C, Y)_0 = d(d-1) + \sum_P (\tilde{C}, \tilde{Y})_P,$$

donde la última suma se hace en todos los puntos  $P$  de intersección de  $\tilde{C}$  y  $\tilde{Y}$ . Cuando  $U$  es suficientemente pequeño, como  $(C, 0)$  tiene singularidad aislada, todos los puntos de la intersección  $\tilde{C} \cap \tilde{Y}$  están contenidos en  $\tilde{C} \cap \tilde{Y} \cap E$  ya que  $C \cap Y \cap U = \{0\}$ . Sean  $\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_k$  estos puntos de intersección.

Usando (1.8), (1.9), (1.10) y la Proposición de 1.2.3, se obtiene

$$\begin{aligned} \mu(C, 0) &= (C, Y)_0 - (C, L)_0 + 1 \\ &= d(d-1) + \sum_{i=1}^k (\tilde{C}, \tilde{Y})_{\tilde{x}_i} - (C, L)_0 + 1 \\ &= d(d-1) + \sum_{i=1}^k (\mu(\tilde{C}, x_i) + (y_1 = 0, \tilde{C})_{\tilde{x}_i} - 1) - (C, L)_0 + 1 \\ &= d(d-1) + \sum_{i=1}^k \mu(\tilde{C}, \tilde{x}_i) + d - k - d + 1. \end{aligned}$$

En la última igualdad se ha aplicado la igualdad de (1.7), i.e.  $d = \text{mult}_0(C) = (\tilde{C}, E) = \sum_{i=1}^k (y_1 = 0, \tilde{C})_{\tilde{x}_i}$ . □

**1.2.6. Observación.** La función analítica  $f$  que define el germen de curva  $(C, 0)$  verifica, en un entorno suficientemente pequeño del origen, las condiciones del teorema de fibración de Milnor. La fórmula de la proposición anterior tiene un análogo en función de la característica de Euler-Poincaré de la fibra de Milnor  $F$  de la singularidad del germen  $(C, 0)$ . Como la singularidad del germen  $(C, 0)$  es aislada, la característica de Euler-Poincaré de  $F$  es igual a  $1 - \mu(C, 0)$ . Sea  $\bar{F}_i$  la fibra de Milnor asociada a la singularidad aislada del germen de curva plana  $(\tilde{C}, \tilde{x}_i)$ . De igual modo, la característica de Euler-Poincaré de  $\bar{F}_i$  es igual a  $1 - \mu(\tilde{C}, \tilde{x}_i)$ . Así, la proposición anterior da la siguiente igualdad:

$$(1.11) \quad \chi(F) = \sum_{i=1}^k \chi(\bar{F}_i) - d(d-1).$$

**1.2.7. Corolario.** Con las notaciones anteriores, si  $d = \text{mult}_0(C)$ , entonces

$$\mu(C, 0) > \mu(\tilde{C}, \tilde{x}_i) \quad \text{para todo } i = 1, \dots, k.$$

*Demostración:* Siempre se tiene que  $d \geq k > 1$  ya que  $(C, 0)$  tiene un único punto singular y

$$d = \text{mult}_0(C) \geq \sum_{i=1}^k \text{mult}_{\tilde{x}_i}(\tilde{C}) \geq k.$$

Por tanto

$$\begin{aligned} \mu(C, 0) - 1 &= \mu(\tilde{C}, \tilde{x}_i) - 1 + d(d-1) + \sum_{j \neq i} (\mu(\tilde{C}, \tilde{x}_j) - 1) \\ &\geq \mu(\tilde{C}, \tilde{x}_i) - 1 + d(d-1) - k + 1 \\ &\geq \mu(\tilde{C}, \tilde{x}_i) - 1 + (d-1)^2 > \mu(\tilde{C}, \tilde{x}_i) - 1. \end{aligned}$$

□

Con este corolario se puede demostrar el teorema de resolución de gérmenes de curvas planas, sin más que aplicar una inducción sobre el número de Milnor de la singularidad.

**1.2.8. Teorema.** Las singularidades de cualquier curva sobre una superficie lisa se pueden resolver mediante un número finito de transformaciones cuadráticas.

**1.2.9. Observación.** En particular, este teorema garantiza que después de un número finito de transformaciones cuadráticas las transformadas estrictas de las componentes irreducibles  $C_i$  de  $C$  no se intersecan.

**1.2.10. Teorema. Resolución Sumergida.** Cada singularidad de curva plana se puede resolver mediante un número finito de transformaciones cuadráticas con centros puntos de modo que la preimagen estricta de la curva tenga cruces normales.

*Demostración:* Se puede obtener la resolución sumergida a partir de la resolución del teorema anterior sin más que darse cuenta que:

1. El lugar donde no hay cruzamiento normal está formado por un número finito de puntos.
2. En cada uno de estos puntos donde no se tenga cruzamiento normal es equivalente a un germen de curva singular con número de Milnor mayor o igual que tres, por lo que se puede repetir el proceso de resolución del teorema anterior para esta nueva curva.

□

**1.2.11. Lema.** Sean  $(C, 0)$  y  $(D, 0)$  dos gérmenes de curva plana, reducidos, sin componentes irreducibles en común. Entonces,

$$\mu(C + D, 0) = \mu(C, 0) + \mu(D, 0) + 2(C, D)_0 - 1,$$

donde  $(C + D, 0)$  es el germen de curva plana definido como la unión de los gérmenes  $(C, 0)$  y  $(D, 0)$ .

*Demostración:* Se puede suponer que  $(C, 0)$  y  $(D, 0)$  están dados, en un entorno  $U$  del origen, como los gérmenes de ceros de sendos polinomios de Weierstrass

$$P_1(x, y) = x^d + a_1(y)x^{d-1} + \dots + a_d(y),$$

$$P_2(x, y) = x^s + a_1(y)x^{s-1} + \dots + a_s(y).$$

En este caso, el germen  $(C + D, 0)$  está definido por el polinomio de Weierstrass  $P$  obtenido al multiplicar  $P_1$  por  $P_2$ , i.e.  $P = P_1 P_2$ . Sean  $Y$ ,  $Y_1$  e  $Y_2$  los gérmenes de curvas definidos por los ceros de  $\frac{\partial P}{\partial x} = 0$ ,  $\frac{\partial P_1}{\partial x} = 0$  y  $\frac{\partial P_2}{\partial x} = 0$ .

Primero probemos que

$$(1.12) \quad (C + D, Y)_0 = (C, Y_1)_0 + (D, Y_2)_0 + 2(C, D)_0$$

En efecto, por la aditividad de la multiplicidad de intersección, se tiene que

$$(C + D, Y)_0 = (C, Y)_0 + (D, Y)_0.$$

Por otro lado, derivando

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial P_1}{\partial x} \cdot P_2 + P_1 \cdot \frac{\partial P_2}{\partial x}.$$

De este modo, por las propiedades de la multiplicidad de intersección,

$$\begin{aligned} (C, Y)_0 &= (C, \frac{\partial P_1}{\partial x} P_2 + P_1 \frac{\partial P_2}{\partial x} = 0)_0 = (C, \frac{\partial P_1}{\partial x} P_2 = 0)_0 \\ &= (C, Y_1)_0 + (C, D)_0 \end{aligned}$$

Como la multiplicidad de intersección  $(D, Y)_0$  también es igual a  $(D, Y_2)_0 + (C, D)_0$ , queda demostrada la identidad (1.12).

Sea  $L$  el germen de curva que tiene por ecuación  $y = 0$ . La Proposición de 1.2.3 establece que el número de Milnor del germen  $(C + D, 0)$  verifica la siguiente igualdad.

$$\mu(C + D, 0) = (C + D, Y)_0 - (L, C + D)_0 + 1.$$

Sustituyendo la expresión de (1.12) en la anterior igualdad se tiene que

$$\mu(C + D, 0) = (C, Y_1)_0 + (D, Y_2)_0 + 2(C, D)_0 - (L, C + D)_0 + 1,$$

y escribiendo  $(C, Y_1)_0$ , respectivamente  $(D, Y_2)_0$ , en función de los números de Milnor de  $(C, 0)$ , respec. de  $(D, 0)$ , se tiene la fórmula buscada,

$$\begin{aligned} \mu(C + D, 0) &= \mu(C, 0) + (L, C)_0 - 1 + \mu(D, 0) \\ &\quad + (L, D)_0 - 1 + 2(C, D)_0 - (L, C + D)_0 + 1 \\ &= \mu(C, 0) + \mu(D, 0) + 2(C, D)_0 - 1 \end{aligned}$$

□

**1.2.12. Observación.** El resultado anterior aplicado a un germen de curva reducido  $(C, 0)$  que admite una descomposición  $C = C_1 + \dots + C_r$ , no necesariamente en componentes irreducibles, nos da la siguiente relación,

$$(1.13) \quad \mu(C, 0) = \sum_{i=1}^r \mu(C_i, 0) + 2 \sum_{i=1, i < j}^{r-1} (C_i, C_j)_0 - (r - 1).$$

Sea  $F_i$  la fibra de Milnor asociada a la singularidad aislada (del germen) de curva plana  $(C_i, 0)$ . Como la característica de Euler-Poincaré de  $F_i$  es igual a  $1 - \mu(C_i, 0)$ , la igualdad (1.13) es equivalente a:

$$(1.14) \quad \chi(F) = -2 \sum_{i=1, i < j}^r (C_i, C_j)_0 + \sum_{i=1}^r \chi(F_i).$$

El propósito de la próxima sección es demostrar la relación (1.14) en el caso en que el germen  $(C, 0)$  no tenga singularidad aislada.

### 1.3 Característica de Euler-Poincaré (compleja) de la fibra de Milnor

Sea  $f : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$  un germen de función analítica. Se puede ver  $f$  como un elemento del dominio de factorización única  $\mathbb{C}\{x, y\}$ . Sea  $f = f_1^{q_1} \dots f_r^{q_r}$  la factorización de  $f$  en factores irreducibles. Sea  $(C, 0)$ , resp.  $(C_i, 0)$ , el germen de curva plana definido por la ecuación  $f = 0$ , resp.  $f_i = 0$ . Supongamos a lo largo de toda la sección que existe algún  $q_i > 1$ .

Sea  $\epsilon > 0$  suficientemente pequeño y sea  $S_\epsilon^3$  la 3-esfera de radio  $\epsilon$ . El germen de curva  $C$  define el *multienlace*  $L := f^{-1}(0) \cap S_\epsilon^3$ . Sea  $\frac{f}{|f|} : S_\epsilon^3 \setminus L \rightarrow S^1$  la fibración de Milnor y sea  $F$  la fibra de Milnor.

Schrauwen, [Schrauwen], expresa la característica de Euler-Poincaré de  $F$  en función de los puntos críticos de deformaciones adecuadas de  $f$ . A'Campo, [A'Campo], y D. Eisenbud y W. Neumann, [E-N], usando métodos bastante diferentes, han calculado muchos invariantes topológicos de  $F$ , en función de grafos asociados al germen  $(C, 0)$ .

En esta memoria sólo estamos interesados en un invariante topológico de  $F$ : la característica de Euler-Poincaré (compleja) de  $F$ . El cálculo de la característica de Euler-Poincaré de  $F$  está basado en la fórmula de N.A'Campo, [A'Campo] Théorème 1, y en las propiedades de los números de intersección. La razón por la cual se calcula la característica de Euler-Poincaré compleja es precisamente por que se usa el resultado de A'Campo.

Sea  $U$  un entorno del origen  $0 \in \mathbb{C}^2$  donde  $f$  converge. Sea  $\sigma : Y \rightarrow U$  la transformación cuadrática de  $U$  con centro el origen. La idea es dar un teorema, Teorema de 1.3.5, que relacione la característica de Euler-Poincaré de  $F$  con las características de Euler-Poincaré de las fibras de Milnor  $F_i$  de la función analítica  $f \circ \sigma$  en los puntos infinitamente próximos que aparecen en  $Y$ . Para ello se comparan los grafos duales de  $f$  y de  $f \circ \sigma$ . El Teorema de 1.3.9 nos da una fórmula para la característica de Euler-Poincaré de  $F$  sin necesidad de construir el grafo de resolución de  $f$ , ó de  $(C, 0)$ :

$$\chi(F) = - \left[ \sum_{i=1, i < j}^{r-1} (C_i, C_j)_0 (q_i + q_j) - (q_1 + \cdots + q_r) + \sum_{i=1}^r q_i \mu(C_i) \right].$$

En los Corolarios de 1.3.10 y de 1.3.12 se obtiene la misma fórmula pero sin exigir que la descomposición de  $f$  sea en componentes irreducibles. Basta encontrar una descomposición "adecuada" de  $f$ . Este último resultado hace que la fórmula anterior tenga su interés desde el punto de vista computacional, ver el Comentario de 1.3.13.

**Preliminares.** Primero de todo, recordemos más definiciones y resultados sobre gérmenes de curvas  $(C, 0)$  contenidos en un germen de superficie lisa, ver [B-K] pág. 370-575, [DB-M] y [A'Campo].

Sea  $\pi : X \rightarrow U$  una sucesión de transformaciones cuadráticas sobre  $U$  tal que, para cada punto del divisor excepcional  $\mathcal{E}_+ := \pi^{-1}(0)$ , el divisor  $\mathcal{E} := \pi^*(C)$  tenga cruzamiento normal.

Sea  $\tilde{C}$  la transformada estricta de  $C$  mediante  $\pi$ . Sea  $E_i$  una componente irreducible del divisor  $\mathcal{E}_+$ .

**1.3.1. Definiciones.** Una *curvilla* de  $E_i$  es un germen de curva liso  $B_i$  sobre  $X$  el cual interseca a  $E_i$  transversalmente en un punto liso de  $\mathcal{E}_+ \setminus (\mathcal{E}_+ \cap \tilde{C})$ . La *multiplicidad*  $m_{E_i}$  de  $E_i$  es el orden de  $f \circ \pi$  sobre  $B_i$ . Evidentemente, la multiplicidad  $m_{E_i}$  no depende de  $B_i$ . Por las propiedades de la multiplicidad de intersección se tiene que si  $E_i$  y  $B_i$  se intersecan en  $x_i$  entonces

$$m_{E_i} = (E_i, B_i)_{x_i}.$$

Esta propiedad permite calcular  $m_{E_i}$  como la multiplicidad de intersección en el origen

entre los gérmenes de curvas  $C$  y  $\pi(B_i)$ .

$$(C, \pi(B_i))_0 = \sum_{P \in \mathcal{E} \cap B_i} (\mathcal{E}, B_i)_P = (E_i, B_i)_{x_i}.$$

**1.3.2. Observación.** La multiplicidad  $m_{E_i}$  es una función lineal de las potencias  $q_1, \dots, q_r$  de las componentes irreducibles  $C_1, \dots, C_r$  de  $C$ . La observación vuelve a ser una consecuencia de las propiedades de los números de intersección ya que

$$m_{E_i} = (C, \pi(B_i))_0 = (C_1^{q_1} + \dots + C_r^{q_r}, \pi(B_i))_0 = \sum_{j=1}^r q_j (C_j, \pi(B_i))_0.$$

**El grafo dual  $G(C, \pi)$ .** Cualquier germen de curva plana  $C$  y cualquier aplicación  $\pi$  como la anterior, tienen asociados un grafo  $G(C, \pi)$ , dicho grafo se denomina grafo dual asociado a  $C$  y a  $\pi$ . Recordemos la construcción del grafo dual. Los vértices de  $G(C, \pi)$  están en biyección con las componentes irreducibles  $E_i$  de  $\mathcal{E}_+$ . Así, a cada vértice  $a$  de  $G(C, \pi)$  le corresponde una única componente irreducible  $E_a$  de  $\mathcal{E}_+$ . Dos vértices  $a$  y  $b$  están unidos por una arista si y sólo si  $E_a$  interseca con  $E_b$ . A cada vértice  $a$ , le añadimos  $l_i$  flechas, siendo  $l_i$  el número de componentes irreducibles de  $\tilde{C}$  que intersecan a  $E_a$ . Cada vértice  $a$  lleva, además, un peso: la multiplicidad  $m_{E_a}$  de  $E_a$ . De igual modo, como las flechas del grafo dual están en biyección con las componentes irreducibles de  $C$ , cada flecha  $l$  lleva peso  $q_l$ , el número de veces que aparece la componente irreducible  $C_l$  en  $C$ . Finalmente, recordar que para un vértice  $a$  del grafo dual se llaman *vecinos de  $a$*  a todos los extremos de las aristas que tocan a  $a$  y todas las flechas que parten del vértice  $a$ . Sea  $\nu(a)$  el conjunto de índices  $b$  tal que  $b$  es un vecino de  $a$ .

**1.3.3. Observación.** Sea  $V(G(C, \pi))$  el conjunto de vértices del grafo dual  $G(C, \pi)$ . P. Du Bois and F. Michel, ver [DB-M] Proposition 1.6, han demostrado que para cada vértice  $a \in V(G(C, \pi))$ , la multiplicidad  $m_{E_a}$  divide a  $\sum_{b \in \nu(a)} m_{E_b}$ .

Cuando  $(C, 0)$  es un germen de curva plana reducido, el grafo dual coincide con el grafo dual del grafo usual de la resolución, ver [B-K] pág. 509, ó con el árbol de la desingularización que usan P. Du Bois y F. Michel, ver por ejemplo [DB-M].

**1.3.4. Observación.** El grafo dual  $G(C, \pi)$  y el grafo dual  $G(C_{red}, \pi)$  asociado al germen de curva reducido  $C_{red} = C_1 + \dots + C_r$  sólo se diferencian en los pesos de los vértices y en los pesos de las flechas que en este último caso son todos iguales a uno.

**La característica de Euler-Poincaré.** Sea  $\sigma : Y \rightarrow U$  la transformación cuadrática del abierto  $U$  con centro el origen. Se denota por  $E_0$  al divisor excepcional de  $\sigma$  y por  $\tilde{C}$  la transformada estricta de  $C$  mediante  $\sigma$ . Sea  $m = m_1 q_1 + \dots + m_r q_r$  la multiplicidad de  $C$  en el origen, donde cada  $m_i$  es la multiplicidad de  $C_i$  en el origen. Entonces  $\sigma^*(C) = \tilde{C} + m E_0$ .

Sean  $P_1, \dots, P_s$  el conjunto de puntos de  $Y$  en los cuales intersecan  $\tilde{C}$  y el divisor excepcional  $E_0$ . Cada uno de estos puntos  $P_j$  está en biyección con una componente tangencial de  $(C, 0)$ , ó de  $(C_{red}, 0)$ , ver el Lema de 1.2.2. Para cada uno de estos puntos  $P_j$ , se eligen coordenadas complejas locales sobre  $Y$  y una bola de radio suficientemente pequeño  $U^j$  centrada en  $P_j$  de modo que:

1. En cada bola  $U^j$  se verifique el Teorema de Fibración de Milnor.
2. Las bolas  $U^j$  son disjuntas dos a dos.

Sea  $F_j$  la fibra de Milnor de  $\tilde{C}$  en el punto  $P_j$ . El siguiente resultado relaciona la característica de Euler-Poincaré de la fibra de Milnor  $F$  y la característica de Euler-Poincaré de las fibras de Milnor  $F_j$ .

**1.3.5. Teorema.** *Con las condiciones anteriores, la característica de Euler-Poincaré de la fibra de Milnor  $F$  satisface la igualdad*

$$\chi(F) = -(q_1 m_1 + \cdots + q_r m_r) \cdot (m_1 + \cdots + m_r - 1) + \sum_{j=1}^s \chi(F_j).$$

*Demostración:* Para todo  $j \in \{1, \dots, s\}$ , sea  $\pi_j : X_j \rightarrow U^j$  la sucesión de transformaciones cuadráticas con centros en puntos infinitamente próximos de  $P_j$  tal que  $X_j$  es un espacio analítico y la aplicación analítica  $\pi_j : X_j \rightarrow U^j$  verifica:

- (i)  $\pi_j|_{X_j - \pi_j^{-1}(P_j)} : X_j - \pi_j^{-1}(P_j) \rightarrow U^j - \{P_j\}$  es una aplicación biholomorfa.
- (ii) El divisor excepcional  $\mathcal{A}_j := \pi_j^{-1}(P_j)$  es una unión de curvas  $D_i^j$  isomorfas a  $\mathbb{P}^1$  que se cortan dos a dos transversalmente.
- (iii) Sea  $C^j = C^{j_1} + \cdots + C^{j_k}$  el germen de  $\tilde{C}$  en  $P_j$ . El divisor  $\pi_j^*(C^j)$  es igual a  $\mathcal{A}_j \cup \tilde{C}^j$ , donde  $\tilde{C}^j = \tilde{C}^{j_1} \cup \cdots \cup \tilde{C}^{j_k}$  es una unión disjunta de curvas lisas que intersecan con  $\mathcal{A}_j$  transversalmente.  $\tilde{C}^j$ , respectivamente  $\tilde{C}^{j_s}$ , es la transformada estricta de  $C^j$ , respec. de  $C^{j_s}$ , y cada  $\tilde{C}^{j_s}$  interseca a  $\mathcal{A}_j$  en un único punto.
- (iv) Si se denota también por  $E_0$  al divisor  $\pi_j^{-1}(E_0)$ , entonces  $\tilde{C}^j$  no interseca a  $E_0$ .

La existencia de  $X_j$  y de  $\pi_j$  con las propiedades (i), (ii) y (iii) se sigue de la resolución sumergida del germen de curva  $(C_{red}^j, P_j)$ , donde  $(C_{red}^j, P_j)$  es el germen de curva definido por la función analítica  $(f_1 \cdots f_r) \circ \sigma$  en un entorno  $U^j$  de  $P_j$ . La condición (iv) se obtiene de una resolución sumergida sin más que realizar transformaciones cuadráticas en los puntos de intersección de  $\tilde{C}^j$  y  $E_0$ .

Sea  $\sigma_1$  la composición de  $\pi_1, \dots, \pi_s$ . No importa el orden en que se realice la composición ya que los  $U^j$  son dos a dos disjuntos. Sea  $X$  la superficie analítica lisa que se obtiene de  $Y$  reemplazando los abiertos  $U^j$  por los correspondientes  $X_j$ . Así,  $X := (\sigma \circ \sigma_1)^{-1}(U)$ , y sea  $\pi := \sigma \circ \sigma_1$ . Por la construcción se verifican las siguientes propiedades:

- (a)  $\pi|_{X - \pi^{-1}(0)} : X - \pi^{-1}(0) \rightarrow U - \{0\}$  es una aplicación biholomorfa.
- (b) El divisor excepcional  $\mathcal{E}_+ := \pi^{-1}(0)$  es una unión de curvas  $E_i$  isomorfas a  $\mathbb{P}^1$  que se cortan dos a dos transversalmente.
- (c) El divisor  $\mathcal{E} := \pi^*(C)$  es igual a  $\mathcal{E}_+ \cup \tilde{C}$ , donde  $\tilde{C} = \tilde{C}_1 \cup \cdots \cup \tilde{C}_r$  es una unión disjunta de curvas lisas que intersecan con  $\mathcal{E}_+$  transversalmente.  $\tilde{C}$ , respectivamente  $\tilde{C}_i$ , es la transformada estricta de  $C$ , respec. de  $C_i$ , y cada  $\tilde{C}_i$  interseca a  $\mathcal{E}_+$  en un único punto.
- (d) Si se denota también por  $E_0$  al divisor  $\pi^{-1}(E_0)$ , entonces  $\tilde{C}$  no interseca a  $E_0$ .



Denotemos por  $\mathcal{A}$  el conjunto de divisores excepcionales

$$\mathcal{A} = \bigcup_{j=1}^s \mathcal{A}_j \cup \{E_0\}.$$

Sea también  $\mathcal{B}$  el conjunto de los divisores del divisor excepcional  $\mathcal{E}_+$ . Como las aplicaciones  $\pi_j$  se han obtenido mediante transformaciones cuadráticas con centros en los puntos infinitamente próximos de  $P_j$  en  $Y$ , se puede establecer una biyección  $\Phi$ :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A} & \xrightarrow{\Phi} & \mathcal{B} \\ D_i^j & \rightarrow & E_i^j \\ E_0 & \rightarrow & E_0 \end{array}$$

donde los divisores  $E_i^j$  y  $D_i^j$  aparecen al realizar la transformación cuadrática del mismo punto infinitamente próximo de  $P_j$ .

Para  $j \in \{1, \dots, s\}$ , la condición (d) asegura que existe un único  $D_0^j$  en  $\mathcal{A}_j$  tal que el correspondiente  $E_0^j = \Phi(D_0^j)$  corta en un único punto a  $E_0$ .

**1.3.6. Lema.** *Sea  $D_i^j$  un curva excepcional de  $\pi_j$  y sea  $E_i^j = \Phi(D_i^j)$ . Denotemos por  $m_{D_i^j}$  la multiplicidad de  $D_i^j$  y por  $m_{E_i^j}$  la multiplicidad de  $E_i^j$ . Entonces se verifica*

$$m_{E_i^j} = m_{D_i^j} + m \cdot \alpha_{E_i^j},$$

donde  $\alpha_{E_i^j}$  sólo depende del número de transformaciones cuadráticas necesarias para que aparezca el divisor excepcional  $E_i^j$ .

*Demostración:* El lema es una consecuencia de la definición de las multiplicidades. Sea  $B_i^j$  una curvillla de  $E_i^j$ , es decir es un germen de curva lisa en  $X$  que interseca a  $E_i^j$  en un único punto  $p$  de modo transversal. Así, se puede ver  $B_i^j$  como una curvillla de  $D_i^j$ . Por tanto, la multiplicidad  $m_{E_i^j}$ , respectivamente  $m_{D_i^j}$ , es la multiplicidad de intersección en el origen, resp. en el punto  $P_j$ , entre las curvas  $C$  y  $\pi(B_i^j)$ , resp. entre las curvas  $C^j$  y  $\pi_j(B_i^j)$ .

Usando la fórmula de Noether, ver 1.2.4,

$$m_{E_i^j} = (C, \pi(B_i^j))_0 = \sum_{j=1}^s (\sigma^*(C), \sigma^*(\pi(B_i^j)))_{P_j}.$$

Obsérvese que  $\sigma^*(\pi(B_i^j))$  es igual a  $\sigma_1(B_i^j)$  y este último germen de curva es igual a  $\pi_j(B_i^j)$ . Es más, el punto  $P_j$  es el único punto en la intersección  $Y \cap E_0 \cap \sigma_1(B_i^j)$ , obteniéndose

$$\begin{aligned} m_{E_i^j} &= (\bar{C} + mE_0, \sigma_1(B_i^j))_{P_j} = (\bar{C}, \pi_j(B_i^j))_{P_j} + m \cdot (E_0, \sigma_1(B_i^j))_{P_j} \\ &= (C^j, \pi_j(B_i^j))_{P_j} + m \cdot (E_0, \sigma_1(B_i^j))_{P_j} \\ &= m_{D_i^j} + m \cdot (E_0, \sigma_1(B_i^j))_{P_j} \end{aligned}$$

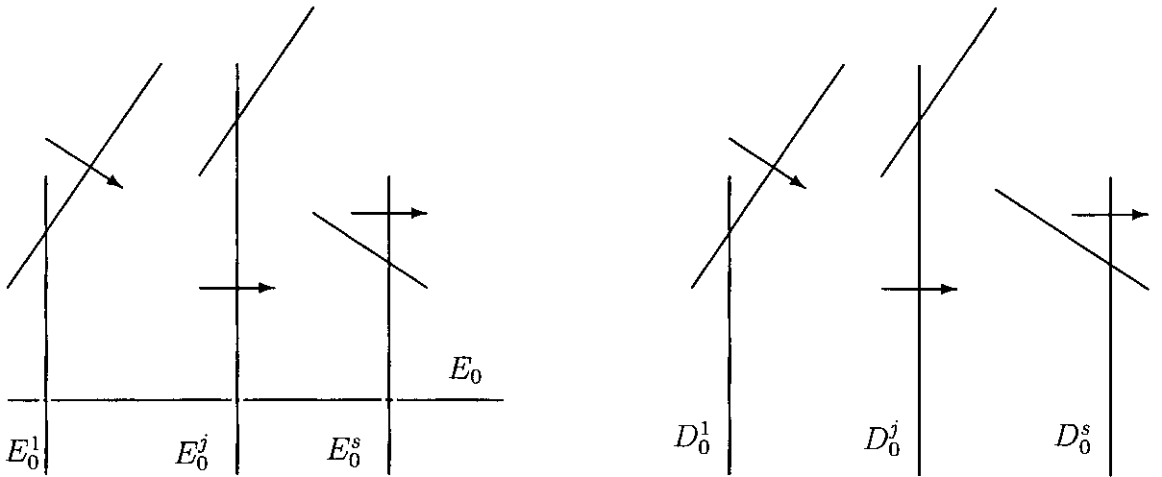
Si se define  $\alpha_{E_i^j}$  como la multiplicidad de intersección en  $P_j$  entre las curvas  $E_0$  y  $\sigma_1(B_i^j)$ , entonces  $\alpha_{E_i^j}$  sólo depende del  $\sigma_1$ , es decir, del número de transformaciones cuadráticas

necesarias para que aparezca el divisor  $E_i^j$ . En particular, no depende de las potencias  $q_1, \dots, q_r$ , de las componentes irreducibles de  $C$ .  $\square$

**1.3.7. Lema.** Para cada  $j \in \{1, \dots, s\}$ , sea  $D_i^j$  una curva excepcional de  $\pi_j$  y sea  $E_i^j = \Phi(D_i^j)$ . Denotemos a  $E_i \setminus (\bigcup_{j \neq i} E_j \cup \tilde{C})$  por  $\check{E}_i^j$ , y a  $D_i^j \setminus (\bigcup_{l \neq i} D_l^j \cup \tilde{C}_j)$  por  $\check{D}_i^j$ .

1. Si  $D_i^j$  no es la curva excepcional  $D_0^j$ , entonces la característica de Euler-Poincaré  $\chi(\check{E}_i^j)$  es igual a la característica de Euler-Poincaré  $\chi(\check{D}_i^j)$ .
2. Para la curva excepcional  $D_0^j$ , la característica de Euler-Poincaré  $\chi(\check{E}_0^j)$  es igual  $\chi(\check{D}_0^j)$  menos uno.

*Demostración:* La demostración es inmediata sin más que darse cuenta que la diferencia entre  $\check{E}_i^j$  y  $\check{D}_i^j$  es la intersección de  $E_i^j$  con  $E_0$ . Esta intersección es vacía salvo que  $E_i^j$  sea  $E_0^j$  en cuyo caso existe un único punto en la intersección. La siguiente figura ilustra el lema.  $\square$



Para terminar de demostrar el teorema vamos a usar la fórmula de A'Campo, ver [A'Campo] Théorème 1. A'Campo demuestra que, si en cada punto de  $\mathcal{E}_+$  el divisor  $\mathcal{E} = \hat{C} + \sum_{i=1}^n m_{E_i} E_i$  tiene cruzamiento normal, entonces

$$\chi(F) = \sum_{i=1}^n m_{E_i} \cdot \chi(\check{E}_i),$$

donde  $\check{E}_i := E_i \setminus (\bigcup_{j \neq i} E_j \cup \hat{C})$ .

La aplicación  $\pi$ , respec.  $\pi_j$ , se ha construido de modo que el divisor  $\mathcal{E}$ , resp.  $\mathcal{A}_j$ , tenga cruzamiento normal. Para cada  $j \in \{1, \dots, s\}$ , se tienen los grafos duales  $\Gamma_+^j := G(\hat{C}, \pi_j)$ , y el grafo dual  $\Gamma_+ := G(C, \pi)$ . Entonces por la fórmula de A'Campo

$$\chi(F) - \sum_{j=1}^s \chi(F_j) = \sum_{b \in V(\Gamma_+)} m_{E_b} \cdot \chi(\check{E}_b) - \sum_{j=1}^s \left( \sum_{b \in V(\Gamma_+^j)} m_{D_b^j} \chi(\check{D}_b^j) \right).$$

Usando la biyección  $\Phi$  entre los conjuntos de curvas excepcionales se obtiene

$$\begin{aligned} \chi(F) - \sum_{j=1}^s \chi(F_j) &= m \cdot \chi(\check{E}_0) + \sum_{j=1}^s \sum_{i \neq 0} \left( m_{E_i^j} \cdot \chi(\check{E}_i^j) - m_{D_i^j} \chi(\check{D}_i^j) \right) \\ &+ \sum_{j=1}^s \left( m_{E_0^j} \cdot \chi(\check{E}_0^j) - m_{D_0^j} \cdot \chi(\check{D}_0^j) \right). \end{aligned}$$

Por los Lemas de 1.3.6 y de 1.3.7 se tiene que

$$\begin{aligned} \chi(F) - \sum_{j=1}^s \chi(F_j) &= m \cdot \chi(\check{E}_0) + \sum_{j=1}^s \sum_{i \neq 0} m \cdot \alpha_{E_i^j} \cdot \chi(\check{D}_i^j) \\ &+ \sum_{j=1}^s \left( m_{D_0^j} + m \cdot \alpha_{E_0^j} \right) \cdot \left( \chi(\check{D}_0^j) - 1 \right) - m_{D_0^j} \cdot \chi(\check{D}_0^j). \end{aligned}$$

Por tanto,

$$(1.15) \quad \chi(F) - \sum_{j=1}^s \chi(F_j) = m \cdot k + \sum_{j=1}^s m_{D_0^j};$$

donde  $k$  es el siguiente entero, que no depende de las potencias  $q_1, \dots, q_r$ , de las componentes irreducibles de  $C$ ,

$$k := \chi(\check{E}_0) + \sum_{j=1}^s \left[ \alpha_{E_0^j} \cdot \left( \chi(\check{D}_0^j) - 1 \right) + \sum_{i \neq 0} \alpha_{E_i^j} \cdot \chi(\check{D}_i^j) \right].$$

Por otro lado, sea  $o$  el vértice de  $\Gamma_+$  correspondiente a  $E_0$ . Los vecinos de  $o$  se corresponden con los divisores  $E_0^j$ ,  $j \in \{1, \dots, s\}$ , que son los únicos que intersecan  $E_0$ . Así, después de la Observación de 1.3.3, la multiplicidad de  $E_0$ , que es  $m$ , divide a

$$\sum_{j=1}^s m_{E_0^j} = \sum_{j=1}^s \left( m_{D_0^j} + m \cdot \alpha_{E_0^j} \right),$$

por lo que  $m$  divide a  $\sum_{j=1}^s m_{D_0^j}$ .

De este modo, para cada  $q_1, \dots, q_r$ , debe existir un entero  $h(q_1, \dots, q_r)$ , que en principio depende de  $q_1, \dots, q_r$ , tal que

$$(1.16) \quad \sum_{j=1}^s m_{D_0^j}(q_1, \dots, q_r) = (m_1 q_1 + \dots + m_r q_r) \cdot h(q_1, \dots, q_r).$$

Obsérvese que cada  $m_{D_0^j}$  depende de  $q_1, \dots, q_r$ . El propósito del siguiente lema es demostrar que  $h$  no depende de  $q_1, \dots, q_r$ .

**1.3.8. Lema.** Sean  $\varphi$  y  $\Psi$  dos funciones lineales

$$\varphi : \mathbb{R}^r \rightarrow \mathbb{R} : (q_1, \dots, q_r) \rightarrow m_1 q_1 + \dots + m_r q_r$$

$$\Psi : \mathbb{R}^r \rightarrow \mathbb{R} : (q_1, \dots, q_r) \rightarrow \lambda_1 q_1 + \dots + \lambda_r q_r,$$

tales que  $(m_1, \dots, m_r)$  y  $(\lambda_1, \dots, \lambda_r)$  pertenecen a  $\mathbb{N}^r \setminus \{0\}$  y para cada  $r$ -upla  $(q_1, \dots, q_r)$  de números naturales, el entero  $\Psi(q_1, \dots, q_r)$  divide a  $\varphi(q_1, \dots, q_r)$ . Entonces existe una constante  $h \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$  tal que para cada  $(q_1, \dots, q_r) \in \mathbb{N}^r \setminus \{0\}$  se tiene que

$$\varphi(q_1, \dots, q_r) = \Psi(q_1, \dots, q_r) \cdot h.$$

*Demostración:* Sea  $H$  el hiperplano de  $\mathbb{R}^r$  definido por la ecuación  $m_1 q_1 + \dots + m_r q_r = 0$ . Sea  $h$  la función

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^r \setminus H & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (q_1, \dots, q_r) & \longrightarrow & \frac{\Psi(q_1, \dots, q_r)}{\varphi(q_1, \dots, q_r)} \end{array}$$

Como  $h$  es el cociente de dos funciones lineales,  $h$  es continua en su dominio  $\mathbb{R}^r \setminus H$ . Denotemos por  $\mathbb{R}^+$  el conjunto de los números reales mayores que cero. Probemos que la función  $h$  es constante sobre  $(\mathbb{R}^+)^r \setminus H$ . Para ello es suficiente probar que es constante sobre  $(\mathbb{Q}^+)^r \setminus H$  ya que luego extendemos a todo  $(\mathbb{R}^+)^r \setminus H$  sin más que usar la densidad de  $(\mathbb{Q}^+)^r$  y la continuidad de  $h$ .

Sea  $(q_1, \dots, q_r) \in (\mathbb{Q}^+)^r \setminus H$ , una  $r$ -upla de números racionales positivos. Sea  $q_i = a_i/b_i$ , donde  $a_i$  y  $b_i$  son números naturales. Sea  $n$  el producto  $b_1 \cdots b_r$ , entonces

$$h\left(\frac{a_1}{b_1}, \dots, \frac{a_r}{b_r}\right) = \frac{\Psi\left(\frac{a_1}{b_1}, \dots, \frac{a_r}{b_r}\right)}{\varphi\left(\frac{a_1}{b_1}, \dots, \frac{a_r}{b_r}\right)} = \frac{n\Psi\left(\frac{a_1}{b_1}, \dots, \frac{a_r}{b_r}\right)}{n\varphi\left(\frac{a_1}{b_1}, \dots, \frac{a_r}{b_r}\right)}.$$

Sea  $n_i$  el producto  $n \cdot a_i/b_i \in \mathbb{N}$ . Usando la linealidad de  $\Psi$  y de  $\varphi$ , se tiene que

$$h\left(\frac{a_1}{b_1}, \dots, \frac{a_r}{b_r}\right) = \frac{\Psi(n_1, \dots, n_r)}{\varphi(n_1, \dots, n_r)} \in \mathbb{Z},$$

ya que, por hipótesis, si  $(n_1, \dots, n_r)$  es una  $r$ -upla de números naturales,  $\Psi(n_1, \dots, n_r)$  divide a  $\varphi(n_1, \dots, n_r)$ . Por tanto, por la continuidad de  $h$ , para cualquier  $(q_1, \dots, q_r) \in (\mathbb{R}^+)^r \setminus H$  se tiene que  $h(q_1, \dots, q_r) \in \mathbb{Z}$ . En particular, la función  $h$  debe ser constante sobre cada componente conexa de  $(\mathbb{R}^+)^r \setminus H$ . Finalmente, el conjunto  $(\mathbb{R}^+)^r \setminus \{0\}$  está contenido en una componente conexa de  $\mathbb{R}^r \setminus H$  ya que los  $q_i$  y los  $m_i$  son números naturales. De este modo  $h$  es constante sobre  $(\mathbb{R}^+)^r \setminus \{0\}$ .  $\square$

La suma  $\sum_{j=1}^s m_{D_0^j} = \lambda_1 q_1 + \dots + \lambda_r q_r$  es una función lineal ya que por la Observación de 1.3.2 cada multiplicidad  $m_{D_0^j}$  es una función lineal de  $q_1, \dots, q_r$ . Por otro lado  $m = m_1 q_1 + \dots + m_r q_r$  es también una función lineal. Además por (1.16),  $\sum_{j=1}^s m_{D_0^j}$  y  $m$  satisfacen las hipótesis del Lema de 1.3.8, lo que implica que existe una constante  $h \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ , que no depende de  $q_1, \dots, q_r$ , tal que

$$\sum_{j=1}^s m_{D_0^j}(q_1, \dots, q_r) = (m_1 q_1 + \dots + m_r q_r) \cdot h.$$

Esto quiere decir que (1.15) es equivalente a

$$(1.17) \quad \chi(F) - \sum_{j=1}^s \chi(F_j) = m \cdot (k + h),$$

donde  $m = m_1 q_1 + \dots + m_r q_r$  y  $k + h$  no depende de las potencias,  $q_1, \dots, q_r$ , de las componentes irreducibles de  $C$ .

Para calcular  $k + h$  usamos el resultado de la Observación de 1.11 el cual permite calcular  $k + h$  en el caso de gérmenes de curvas reducidas.

*Para un germen de curva plana reducida, i.e. cuando  $q_1 = \dots = q_r = 1$ , se tiene:*

$$\chi(F) - \sum_{j=1}^s \chi(F_j) = -(m_1 + \dots + m_r) \cdot (m_1 + \dots + m_r - 1).$$

De este modo el valor de  $k + h$  es  $-(m_1 + \dots + m_r - 1)$ . Sustituyendo en (1.17) este valor se termina la demostración del la demostración del teorema

$$\chi(F) - \sum_{j=1}^s \chi(F_j) = -(q_1 m_1 + \dots + q_r m_r) \cdot (m_1 + \dots + m_r - 1).$$

□

Una consecuencia directa del teorema anterior es la generalización de (1.14) al caso no reducido.

**1.3.9. Teorema.** *La característica de Euler-Poincaré de la fibra de Milnor satisface la siguiente igualdad*

$$\chi(F) = - \sum_{i=1, i < j}^{r-1} (C_i, C_j)_0 (q_i + q_j) + (q_1 + \dots + q_r) - \sum_{i=1}^r q_i \mu(C_i, 0).$$

*Demostración:* Recordemos la siguientes propiedades, algunas de ellas ya vistas aquí, de los gérmenes de curvas planas irreducibles, ver [B-K] Theorem 13 pág. 518 y pág. 574.

La multiplicidad de intersección entre dos gérmenes de curvas planas irreducibles  $C_1$  y  $C_2$  distintas satisface la igualdad

$$(C_1, C_2)_0 = \sum_P \nu_P^1 \nu_P^2,$$

donde la suma está tomada en todos los puntos  $P$  infinitamente próximos que comparten ambas curvas, y  $\nu_P^1, \nu_P^2$  son las multiplicidades de las transformadas estrictas de  $C_1$  y  $C_2$  en esos puntos.

Por otro lado, el número de Milnor de un germen de curva irreducible satisface

$$\mu(C, 0) = \sum_P \nu_P (\nu_P - 1),$$

donde la suma está tomada en todos los puntos  $P$  infinitamente próximos del origen y  $\nu_P$  es la multiplicidad de la transformada estricta de  $C$  en ese punto.

Así, la fórmula que se quiere demostrar en el teorema se puede expresar de la siguiente manera:

$$\chi(F) = - \left[ \sum_{i=1, i < j}^{r-1} \left( \sum_P \nu_P^i \nu_P^j \right) (q_i + q_j) - (q_1 + \cdots + q_r) + \sum_{i=1}^r q_i \left( \sum_P \nu_P^i (\nu_P^i - 1) \right) \right],$$

donde las sumas con subíndice  $P$  están tomadas en los correspondientes puntos infinitamente próximos de las curvas  $C_i$  y  $\nu_P^i$  es la multiplicidad de la transformada estricta de  $C_i$  en el punto  $P$ .

Demostremos el teorema por inducción sobre el número  $r$  de componentes irreducibles de  $(C, 0)$ .

$r=1$ . En este caso la ecuación que define  $(C, 0)$  es de la forma  $f^q$ , con  $f$  irreducible. Sea  $(C_{red}, 0)$  el germen de curva definido por  $f$ . Sea  $F$  la fibra de Milnor asociada a  $f^q$  y  $\bar{F}$  la fibra de Milnor asociada a  $f$ . En este caso,

$$\chi(F) = q\chi(\bar{F}) = q(1 - \mu(C_{red}, 0)).$$

Sea  $U$  un abierto del origen en  $\mathbb{C}^2$  donde  $f$  converge. Para demostrar la anterior igualdad se considera una resolución sumergida  $\pi : X \rightarrow U$  de  $C_{red}$ . Sea  $\mathcal{E}_+ := \pi^{-1}(0)$  el divisor excepcional de  $\pi$ . Evidentemente,  $\pi^*(C) = \pi^*(qC_{red}) = q\pi^*(C_{red})$ . Es decir la multiplicidad  $m^E$  con que aparece una curva excepcional  $E$  en  $\pi^*(C)$  es  $q$  veces la multiplicidad  $m_{red}^E$  con que aparece  $E$  en el divisor  $\pi^*(C_{red})$ . Así, usando la fórmula de A'Campo, ver [A'Campo] Théorème 1, se tiene que

$$\chi(F) = \sum m^{E_i} \cdot \chi(\check{E}_i) = \sum qm_{red}^{E_i} \chi(\check{E}_i) = q\chi(\bar{F}).$$

$r-1 \Rightarrow r$ . Supongamos que se ha demostrado la fórmula de teorema para todo germen de curva que tenga un número de ramas menor que  $r$ . Sea  $C = q_1 C_1 + \cdots + q_r C_r$  y sea, para cada  $i \in \{1, \dots, r\}$ ,  $m_i = \text{mult}_0(C_i)$ . Sean  $D_1, \dots, D_s$  las componentes tangenciales de  $C$ , ó de  $C_{red}$ . Pueden ocurrir dos cosas:

(a) Si  $s > 1$ , i.e. existen al menos dos componentes tangenciales distintas, de modo que cada una de ellas tiene un número de ramas menor que  $r$ . Además si  $C_i \in D_\alpha$  y  $C_j \in D_\beta$ , con  $\alpha \neq \beta$ , entonces  $(C_i, C_j)_0 = m_i m_j$ . Si ahora se mira el primer punto infinitamente próximo, es decir el origen, se tiene la igualdad

$$\sum_{i=1, i < j}^{r-1} m_i m_j (q_i + q_j) + \sum_{i=1}^r q_i m_i (m_i - 1) = (q_1 m_1 + \cdots + q_r m_r) \cdot (m_1 + \cdots + m_r - 1).$$

Aplicando el Teorema de 1.3.5, la demostración de la fórmula se sigue por hipótesis de inducción ya que las transformadas estrictas de las componentes tangenciales tienen un número de ramas menos que  $r$ .

(b) Supongamos que  $s = 1$ , esto quiere decir que en la primera transformación cuadrática sólo hay un punto singular. Por la Observación de 1.2.9 después de

un número finito de transformaciones cuadráticas la transformada estricta de  $C$  tiene al menos dos componentes tangenciales. Aplicando el Teorema de 1.3.5 se finaliza la demostración.  $\square$

**1.3.10. Corolario.** Sea  $f = h_1^{q_1} \cdots h_r^{q_r}$  una descomposición de  $f$  tal que:

1. Cada  $h_i$  es un germen de función sin componentes múltiples.
2. Para todo  $i, j \in \{1, \dots, r\}$ ,  $i \neq j$ , los gérmenes  $h_i$  y  $h_j$  no tienen componentes irreducibles en común.

Sea  $(C, 0)$  el conjunto de ceros de  $f$ , y sea  $F$  la fibra de Milnor, entonces

$$\chi(F) = - \sum_{i=1}^{r-1} \sum_{i < j} (C_i, C_j)_0 (q_i + q_j) + (q_1 + \cdots + q_r) - \sum_{i=1}^r q_i \mu(C_i, 0).$$

*Demostración:* Para cada  $i \in \{1, \dots, r\}$ , sea  $f_{i,1} \cdots f_{i,l(i)}$  una descomposición en factores irreducibles de  $h_i$ . Sea  $A_i$  el germen de curva definido por la ecuación local  $h_i = 0$ , entonces  $A_i = C_{i,1} + \cdots + C_{i,l(i)}$ . Usando la fórmula de (1.13) se tiene que

$$\mu(A_i) = \sum_{j=1}^{l(i)} \mu(C_{i,j}) + 2 \sum_{n < m} (C_{i,n}, C_{i,m})_0 - (l(i) - 1).$$

De este modo el corolario es una consecuencia de las propiedades de la multiplicidad de intersección.  $\square$

**1.3.11. Definición.** [B-W-K] pág. 100. Sea  $R$  un dominio de factorización única. Un elemento  $b \in R$  se dice que es *libre de cuadrados* si  $p^2$  no divide a  $b$  siempre que  $p \in R$  sea irreducible. Sea  $0 \neq b$  una no unidad de  $R$ . Una *descomposición libre de cuadrados* de  $b$  es una representación de la forma

$$b = ub_1 b_2^2 b_3^3 \cdots b_m^m,$$

donde  $u \in R$  es una unidad y  $b_1, \dots, b_r \in R$  son libres de cuadrados y dos a dos primos entre sí.

Aplicando el Corolario de 1.3.10 se tiene que

**1.3.12. Corolario.** La fórmula de la característica de Euler-Poincaré también se verifica aunque sólo se conozca una descomposición libre de cuadrados de  $f$ .

**1.3.13. Comentario.** Desde el punto de vista computacional, la fórmula del corolario anterior es bastante útil. Primero, sea  $R$  un anillo computable de característica cero, y sea  $f$  un polinomio en  $R[x, y]$ . Existe un algoritmo que calcula una descomposición libre de cuadrados de  $f$  en  $R[x, y]$ , ver [B-W-K], Proposition 2.86, Corollary 2.92. Esta es una descomposición libre de cuadrados en  $R\{x, y\}$ . Después, se pueden calcular las multiplicidades de intersección, y por tanto los números de Milnor, usando por ejemplo el SINGULAR, [Singular].

## Capítulo 2

# Cono tangente con singularidades aisladas

Sea  $f : (\mathbb{C}^{n+1}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$  un germen de función analítica y sea  $(V, 0)$  el germen de hipersuperficie definido como el lugar de los ceros de  $f$ , es decir  $(V, 0) := (f^{-1}(0), 0) \subset (\mathbb{C}^{n+1}, 0)$ . Sea  $f = f_d + f_{d+1} + \dots$  la descomposición de  $f$  en suma de componentes homogéneas, esto es  $f_s$  es un polinomio homogéneo de grado  $s$ .

Sea  $h$  un polinomio homogéneo en  $\mathbb{C}[z_0, \dots, z_n]$ , a partir de ahora denotaremos por  $Z(h) \subset \mathbb{P}^n$  a la hipersuperficie de  $\mathbb{P}^n$ , reducida o no, definida por los ceros de  $h$ .

Como  $(V, 0)$  es un germen de hipersuperficie, el cono tangente de  $(V, 0)$  en el origen viene definido como el conjunto de ceros en  $(\mathbb{C}^{n+1}, 0)$  de  $f_d$ , (la forma homogénea no nula de menor grado de  $f$ ). Se identificará el cono tangente de la hipersuperficie  $(V, 0)$  con el proyectivizado del cono tangente  $D := Z(f_d) \subset \mathbb{P}^n$ . Por otro lado, por ser el anillo  $\mathbb{C}[z_0, \dots, z_n]$  dominio de factorización única y ser  $f_d$  un elemento homogéneo de grado  $d$ ; consideremos  $f_d = f_1^{q_1} \cdots f_r^{q_r}$  la factorización de  $f_d$  como producto de polinomios homogéneos irreducibles. De este modo, el (proyectivizado del) cono tangente de  $Z$  en 0 es  $D = q_1 C_1 + \dots + q_r C_r$ , con  $C_i := Z(f_i)$ .

En este capítulo se va a tratar con singularidades aisladas (de gérmenes) de hipersuperficies  $(V, 0)$  tales que su cono tangente (proyectivizado)  $D$  sea una hipersuperficie de  $\mathbb{P}^n$  con singularidades aisladas. B. Teissier, [Teissier 1] Prop. 2.7, ya demostró que en el caso en que  $D$  sea una hipersuperficie proyectiva lisa de  $\mathbb{P}^n$ , es decir, cuando  $D$  no tenga ningún punto singular, el germen  $(V, 0)$  es topológicamente equivalente al cono definido por  $f_d = 0$  en  $(\mathbb{C}^{n+1}, 0)$ .

La clave en el estudio de este tipo de singularidades va a estar en poder dar una descripción de los invariantes polares  $(e_q, m_q)$ . Estos invariantes recogen información del comportamiento topológico de la singularidad. El estudio de los invariantes se hace en la primera sección del capítulo. Para su definición es necesario introducir la *curva polar*. Al realizar el estudio de la curva polar es donde aparece la necesidad de imponer que  $D$  sea una hipersuperficie con singularidades aisladas. Cuando esto es así, hemos sido capaces de dar una descripción del cono tangente de la curva polar, que va a permitir por un lado, dar una cota del supremo de los cocientes  $\frac{e_q}{m_q}$ , Teorema de 2.1.16, y por otro dar una fórmula de tipo Noether para el número de Milnor de  $(V, 0)$ , Teorema de 2.1.19.



En la segunda sección se dan condiciones necesarias para construir una deformación que preserve la multiplicidad y el número de Milnor de la singularidad  $(V, 0)$ .

Seguidamente usando los resultados de la primera sección se da una breve demostración de la fórmula de Yomdin y se recuerdan algunos resultados obtenidos por Luengo y Melle, [L-M], que van a dar lugar a la definición de las *singularidades bivalentes*. Es de resaltar la aplicación de la fórmula de Yomdin al caso de curvas planas. Dicha aplicación va a permitir en el próximo capítulo estudiar la sección plana genérica de algunas singularidades de superficies de  $(\mathbb{C}^3, 0)$ .

En la última sección se definen las singularidades bivalentes. Hablando mal y pronto, son singularidades aisladas que vienen definidas por una función analítica que tiene sólo dos componentes homogéneas no nulas, es decir  $f = f_d + f_{d+k}$ . Esencialmente en esta sección y en el próximo capítulo se estudiarán sólo gérmenes de superficies  $(V, 0) \subset (\mathbb{C}^3, 0)$ . La condición de que el cono tangente  $D$  de la superficie tenga singularidades aisladas en  $\mathbb{P}^2$  implica que  $D$  es una curva plana reducida. Esto va a permitir hacer un estudio más exacto del número de Milnor de una singularidad bivalente y de la cota del supremo de los cocientes de los invariantes polares.

## 2.1 Invariantes polares $(e_q, m_q)$

Sea  $\pi : (\widetilde{\mathbb{C}^{n+1}}, E) \rightarrow (\mathbb{C}^{n+1}, 0)$  la transformación cuadrática de  $(\mathbb{C}^{n+1}, 0)$  con centro el origen; sea  $(\tilde{V}, D)$  la transformada estricta del germen  $(V, 0)$  que tiene singularidad aislada y sea  $E := \pi^{-1}(0) \cong \mathbb{P}^n$  el divisor excepcional. Si  $D$  es una hipersuperficie de  $\mathbb{P}^n$  con singularidades aisladas, en el Lema de 2.1.2 se muestra que  $\tilde{V}$  sólo tiene singularidades aisladas.

B. Teissier, [Teissier 2], definió y estudió las propiedades de los *invariantes polares*  $(e_q, m_q)$  de un germen de hipersuperficie  $(V, 0) \subset (\mathbb{C}^{n+1}, 0)$  con singularidad aislada. El propósito de esta sección es dar una cota para el supremo de los cocientes  $\{\frac{e_q}{m_q}\}$ . La cota está en función del supremo de los números de Milnor de las singularidades aisladas de la superficie  $\tilde{V}$ . El interés de esta cota se basa en que el supremo de los cocientes  $\{\frac{e_q}{m_q}\}$  está relacionado con el orden de  $C^0$ -suficiencia del germen  $(V, 0)$ . Por lo que el autor conoce, estos invariantes sólo se han podido determinar en el caso de curvas planas por Merle, [Merle] y en el caso de las singularidades que verifiquen la condición  $(*)$  de la fórmula de Yomdin por Luengo y Melle, [L-M], ver la tercera sección de este capítulo dedicada a la fórmula de Yomdin.

Una consecuencia de este cálculo de los invariantes polares es una relación entre el número de Milnor de  $(V, 0)$  y la suma de los números de Milnor de  $\tilde{V}$  en todos sus puntos singulares.

**2.1.1. Observación.** Existe una biyección entre los puntos-dirección  $P$  del proyectivizado del cono tangente  $D$  y los puntos  $\tilde{P}$  de la transformada estricta  $\tilde{V}$  que están en el divisor excepcional  $E$ . Sea  $P \in D$ , podemos suponer que  $P$  tiene coordenadas homogéneas  $P = (1 : 0 : \dots : 0)$ . Por tanto, las ecuaciones locales de  $\pi$  en un entorno de  $\tilde{P}$  son  $\pi(x_0, \dots, x_n) = (x_0, x_1 x_0, \dots, x_n x_0)$ . En estas coordenadas afines,  $\tilde{P}$  es el origen.

**2.1.2. Lema.** *Si  $(V, 0)$  tiene singularidad aislada y la hipersuperficie  $D$  tiene un número finito de puntos singulares entonces la hipersuperficie  $(\tilde{V}, D)$  de  $(\mathbb{C}^{n+1}, E)$  tiene, a lo más, singularidades aisladas.*

*Demostración:* Como  $(V, 0)$  tiene sólo un punto singular aislado, las singularidades de  $\tilde{V}$  están en la intersección de  $\tilde{V}$  con el divisor excepcional  $E$ .

Sea  $P \in D$ , podemos suponer que  $P$  tiene coordenadas homogéneas  $P = (1 : 0 : \dots : 0)$ . Por tanto, las ecuaciones locales de  $\pi$  en un entorno de  $\tilde{P}$  son  $\pi(x_0, \dots, x_n) = (x_0, x_1x_0, \dots, x_nx_0)$ . En estas coordenadas afines,  $\tilde{P}$  es el origen y  $\tilde{V}$  en un entorno de  $\tilde{P}$  está definida por los ceros de

$$f_d(1, x_1, \dots, x_n) + x_0^k g(x_0, x_1, \dots, x_n).$$

Aquí,  $f_d(1, x_1, \dots, x_n) = 0$  es una ecuación afín de la hipersuperficie  $D$  en  $P$ ,  $E$  tiene por ecuación  $\{x_0 = 0\}$ . Los puntos singulares de  $\tilde{V}$  deben ser puntos singulares de  $D$  los cuáles son, por hipótesis, un número finito.  $\square$

**2.1.3. Observación.** Si  $n = 2$ , la condición de que la superficie  $D$  tenga un número finito de puntos singulares dice que  $D$  es reducida, sin embargo, para  $n > 2$ , la hipersuperficie  $D$  debe ser necesariamente irreducible.

**2.1.4. Observación.** La condición de que  $(V, 0)$  tenga singularidad aislada es necesaria ya que por ejemplo el conjunto de puntos singulares de los ceros de la función analítica  $x^2z + y^3 + y^2z^3$  no son aislados, a pesar de que  $Sing(D) = \{(0 : 0 : 1)\}$ .

**Variedades polares.** Hagamos una rápida introducción a las variedades polares. En este punto seguiremos los artículos de Teissier, [Teissier 1] y [Teissier 2]. Sea  $f \in \mathbb{C}\{z_0, \dots, z_n\}$  un germen de función analítica tal que su lugar de ceros define un germen de hipersuperficie  $(V, 0) \subset (\mathbb{C}^{n+1}, 0)$  con singularidad aislada. Sea  $U$  un entorno del origen donde  $f$  converge.

**2.1.5. Lema.** [Teissier 1]. *Sea  $(V, 0) \subset (\mathbb{C}^{n+1}, 0)$  un germen de hipersuperficie analítica reducida. Para todo  $1 \leq i \leq n+1$ , existe un abierto denso de Zariski  $U^{(i)}$  de la Grassmanniana de  $i$ -planos de  $(\mathbb{C}^{n+1}, 0)$  que pasan por el origen tal que el tipo topológico de  $(V \cap H, 0)$  es independiente de  $H \in U^{(i)}$ . Se puede, por tanto, hablar para cada  $1 \leq i \leq n+1$ , del tipo topológico de una sección  $i$ -plana genérica de  $(V, 0)$ .*

**2.1.6. Definición.** [Teissier 1]. Sea  $(V, 0) \subset (\mathbb{C}^{n+1}, 0)$  un germen de hipersuperficie analítica. Sea  $i_0$  la codimensión en  $(\mathbb{C}^{n+1}, 0)$  del lugar singular de  $(V, 0)$ . Después del resultado anterior se puede hablar del *número de Milnor de una sección por un  $i$ -plano genérico* de  $(V, 0)$ , para cada  $i \leq i_0$ . Denotaremos por  $\mu^{(i)}(V, 0)$  a este número. Para  $i_0 < i \leq n+1$ , pondremos  $\mu^{(i)}(V, 0) = \infty$ , y denotaremos por

$$\mu^*(V, 0) = (\mu^{(n+1)}(V, 0), \dots, \mu^{(i)}(V, 0), \dots, \mu^{(1)}(V, 0)).$$

**2.1.7. Propiedades.** [Teissier 1]. Es inmediato verificar que

- (a)  $\mu^{(n+1)}(V, 0) < \infty$  si y sólo si  $(V, 0) \subset (\mathbb{C}^{n+1}, 0)$  es una singularidad aislada y en este caso este número es el número de Milnor habitual  $\mu(V, 0)$  de  $(V, 0)$ .
- (b)  $\mu^{(1)}(V, 0) = \text{mult}_0(V) - 1$ , donde  $\text{mult}_0(V)$  denota la multiplicidad de la hipersuperficie  $(V, 0)$  en el origen.

**2.1.8. Definición.** Dos gérmenes de hipersuperficie analíticos reducidos  $(V_1, x_1)$  y  $(V_2, x_2)$  de la misma dimensión se dice que *tienen el mismo tipo topológico*, si existen representantes  $(V_i, x_i) \subset (U_i, x_i)$ , donde  $U_i$  es un abierto de  $\mathbb{C}^{n+1}$ , y un homeomorfismo  $\phi : (U_1, x_1) \rightarrow (U_2, x_2)$  que lleva  $V_1$  a  $V_2$ .

**2.1.9. Comentario.** La sucesión de números de Milnor  $\mu^*$  es capaz de caracterizar el tipo topológico de las familias de hipersuperficies. Sea  $(V, 0)$  un germen de hipersuperficie con singularidad aislada. Sea  $F : X \rightarrow \mathbb{D} = \{t \in \mathbb{C} : |t| < 1\}$  es una deformación de  $(V, 0)$  junto con una sección  $\sigma$  tal que  $X - \sigma(\mathbb{D})$  es liso sobre  $\mathbb{D}$ . Teissier demuestra, [Teissier 1], que si la familia de  $\{X_t := F^{-1}(t)\}_{t \in \mathbb{D}}$  tiene la sucesión de números de Milnor  $\mu^*$  constante entonces el tipo topológico de la hipersuperficies  $(X_t, \sigma(t))$  no cambia.

De hecho lo que Teissier muestra es que si la sucesión  $\mu^*$  es constante entonces el par de conjuntos analíticos  $(X - \sigma(\mathbb{D}), \sigma(\mathbb{D}))$  verifica las condiciones de Whitney. El recíproco de este resultado ha sido probado por Briançon y Speder, [B-S 2].

Por otro lado Teissier da la siguiente construcción, ver [Teissier 1] y [Teissier 2]. Para todo entero  $i \in \{1, \dots, n\}$ , y para todo  $i$ -plano  $(H, 0) \subset (\mathbb{C}^{n+1}, 0)$  de dimensión  $i$ , se considera el conjunto  $F_H$  de puntos de  $\mathbb{P}^n$  que se corresponden con hiperplanos de  $(\mathbb{C}^{n+1}, 0)$  que contienen a  $H$ ;  $F_H$  es un subespacio lineal de dimensión  $n - i$  en  $\mathbb{P}^n$ . Sea  $V_p$  la hipersuperficie de nivel de  $f$  que pasa por  $p$ , es decir,

$$V_p := \{z \in \mathbb{C}^{n+1} : f(z) - f(p) = 0\}.$$

Sea  $\Gamma_H^0 \subset U \setminus \{0\}$  el conjunto de puntos  $p$  de  $U \setminus \{0\}$  tales que el hiperplano tangente a  $V_p$  en  $p$  contiene a un hiperplano paralelo a  $H$ , es decir,

$$\Gamma_H^0 = \{p \in U \setminus \{0\} : T_p V_p \text{ contiene } i\text{-plano paralelo a } H\}$$

El conjunto  $\Gamma_H^0$  es un subconjunto analítico de  $U$ . Aplicando el teorema de extensión para conjuntos analíticos, [G-R] pág. 181, se tiene que la clausura topológica  $\Gamma_H$  de  $\Gamma_H^0$  en  $U$  es un subespacio analítico cerrado de  $U$ , que recibe el nombre de *variedad polar asociada a  $f$  y a  $H$* . La relación entre los números de Milnor de las secciones planas genéricas y las variedades polares viene dada en el siguiente teorema de Teissier.

**2.1.10. Teorema.** [Teissier 2]. *Para todo  $i \in \{1, \dots, n\}$ , existe un abierto denso de Zariski  $V^{(i)}$  de la grassmaniana de  $i$ -planos de  $(\mathbb{C}^{n+1}, 0)$  tal que si  $H \in V^{(i)}$ ,  $\Gamma_H$  es una intersección completa con singularidad aislada, de dimensión  $\dim_0 \Gamma_H = n + 1 - i$ , y la multiplicidad en el origen de la variedad polar de  $f$  relativa a  $H$  coincide con  $(\Gamma_H, H)_0 = \mu(Z \cap H, 0) = \mu^{(i)}(V, 0)$ , el número de Milnor de una sección por un  $i$ -plano genérico.*

Observar que si  $H := \{z_0 = \dots = z_i = 0\}$ , la variedad polar asociada a  $f$  y a  $H$  tiene por ecuaciones:

$$\frac{\partial f}{\partial z_{i+1}} = \dots = \frac{\partial f}{\partial z_n} = 0$$

**Hiperplanos adecuados y los invariantes  $(e_q, m_q)$ .** El caso de más interés para esta memoria es cuando  $H$  es un hiperplano. En este caso,  $\Gamma_H$  es una curva, la *curva polar*. Henry-Merle, [H-M], han probado que existe un abierto (denso) de Zariski  $W_1$  en la grassmaniana de hiperplanos de  $(\mathbb{C}^{n+1}, 0)$  tal que si  $H \in W_1$ , la curva polar  $\Gamma_H$  asociada a  $H$  es transversal a  $H$ .

Teissier en [Teissier 2] demuestra que existe un abierto (denso) de Zariski  $W_2$  de  $\mathbb{P}^n$  de direcciones de hiperplanos de  $(\mathbb{C}^{n+1}, 0)$ , tal que el número de componentes irreducibles  $r$  de la curva polar  $\Gamma_H$  es independiente de  $H \in W_2$ , y que si  $\Gamma_H = \cup_{q=1}^r \Gamma_q$  es la descomposición de  $\Gamma_H$  en componentes irreducibles, la sucesión de multiplicidades en el origen,  $\text{mult}_0(\Gamma_q)$ ;  $1 \leq q \leq r$ , y la sucesión de multiplicidades de intersección,  $(\Gamma_q, Z)_0$ ;  $1 \leq q \leq r$ , son también independientes de  $H \in W_2$ . De este modo Teissier define, [Teissier 2], para cada  $1 \leq q \leq r$ , dos enteros positivos  $e_q$  y  $m_q$  como  $m_q = m_0(\Gamma_q)$  y  $e_q + m_q = (\Gamma_q, Z)_0$ . Además, demuestra que se cumplen las siguientes igualdades:

$$(2.1) \quad \sum_{q=1}^r e_q = \mu^{n+1}(V, 0) = \mu(V, 0),$$

$$(2.2) \quad \sum_{q=1}^r m_q = \mu^{(n)}(V, 0).$$

Cuando  $D$  tiene un número finito de puntos singulares, existe otro abierto (denso) de Zariski  $W_3$  en la grassmaniana de hiperplanos de  $(\mathbb{C}^{n+1}, 0)$  tal que  $H \in W_3$  si la variedad proyectiva  $H \cap D$  es lisa, en particular este  $H$  no contendrá ningún punto singular de  $D$ , basta aplicar un teorema de tipo Bertini, ver [Hartshorne] Teorema 8.8.

**2.1.11. Definición.** Se considera a partir de ahora el abierto (denso) de Zariski  $W$  de la grassmaniana de hiperplanos de  $(\mathbb{C}^{n+1}, 0)$  que pasan por el origen que resulta al intersectar los abiertos  $W_1, W_2$  y  $W_3$  anteriores. A cualquier hiperplano  $H$  de  $W$  lo llamaremos *hiperplano adecuado para  $(V, 0)$* .

**2.1.12. Definición.** [Teissier 2]. Dos gérmenes de hipersuperficie con singularidad aislada  $(V_0, 0) \subset (\mathbb{C}^{n+1}, 0)$  y  $(V_1, 0) \subset (\mathbb{C}^{n+1}, 0)$  son *(c)-secantes* si existe una familia uniparamétrica de gérmenes de hipersuperficies donde una fibra es isomorfa a  $(V_0, 0)$  y otra es isomorfa a  $(V_1, 0)$  y en cada punto se satisface la condición (c) siguiente:

Una familia de gérmenes de hipersuperficies  $\mathcal{B} \subset \mathbb{C}^{n+1} \times \mathcal{T}$ ,  $\mathcal{T}$  entorno suficientemente pequeño del origen en  $\mathbb{C}$ , definida por  $F(z_0, \dots, z_n, t) = 0$ , donde se supone que el lugar singular está dado por  $\{0\} \times \mathcal{T}$ , i.e.  $F(0, t) \equiv 0$ ,  $\frac{\partial F}{\partial z_i}(0, t) \equiv 0$ , satisface la condición (c) en 0 si:

$$\frac{\partial F}{\partial t} \in \overline{(z_0, \dots, z_n)} \cdot \overline{\left( \frac{\partial F}{\partial z_0}, \dots, \frac{\partial F}{\partial z_n} \right)}$$

en  $\mathbb{C}\{z_0, \dots, z_n, t\}$ , donde la barra significa la clausura entera del ideal.

Teissier en [Teissier 2] demuestra que dos gérmenes de hipersuperficies con singularidad aislada (c)-secantes tienen el mismo tipo topológico y todas sus secciones  $i$ -planas genéricas también tienen el mismo tipo topológico. De este modo la sucesión de números de Milnor  $\mu^*$  es la misma para ambos gérmenes.

El resultado de Teissier que da importancia a los invariantes polares es el siguiente teorema que da una relación entre el supremo de los cocientes  $\{\frac{c_q}{m_q}\}$ , el orden de  $C^0$ -determinación de  $(V, 0)$  y el orden de (c)-secante.

**2.1.13. Teorema. [Teissier 2].** Sea  $f \in \mathbb{C}\{z_0, \dots, z_n\}$  un germen de función analítica tal que su lugar de ceros define un germen de hipersuperficie  $(V, 0) \subset (\mathbb{C}^{n+1}, 0)$  con singularidad aislada. Para un entero  $N$ , las propiedades siguientes son equivalentes:

- (i)  $N > \sup \{\frac{c_q}{m_q}\}$ .
- (ii) Todo germen  $g \in \mathbb{C}\{z_0, \dots, z_n\}$  tal que  $g - f \in \mathfrak{m}^{N+1}$ , define, mediante  $g = 0$ , un germen de hipersuperficie con el mismo tipo topológico que  $(V, 0)$ .
- (iii) Todo germen  $g \in \mathbb{C}\{z_0, \dots, z_n\}$  tal que  $g - f \in \mathfrak{m}^{N+1}$ , define, mediante  $g = 0$ , un germen de hipersuperficie (c)-secante a  $(V, 0)$ .

**Cono tangente de la curva polar.** Sea  $f \in \mathbb{C}\{z_0, \dots, z_n\}$  un germen de función analítica de modo que su lugar de ceros define un germen de hipersuperficie  $(V, 0) \subset (\mathbb{C}^{n+1}, 0)$  con singularidad aislada. Supongamos que  $Sing(D)$  es un conjunto finito. Sea  $H \in W$  un hiperplano adecuado para  $f$  y para  $(V, 0)$ , se eligen coordenadas de modo que  $H$  sea  $\{z_0 = 0\}$ . Ahora, el germen de curva  $\Gamma_H$  está definido por las ecuaciones  $f_{z_1} = 0, \dots, f_{z_n} = 0$ , y  $Sing(D) \cap \mathcal{Z}(z_0)$  es un conjunto vacío ya que  $H$  está en  $W_3$ . Sea  $C\Gamma_H$  el proyectivizado del cono tangente de  $\Gamma_H$  en el origen. Entonces

**2.1.14. Proposición.** Una base standard para el ideal  $I = (f_{z_1}, \dots, f_{z_n})\mathbb{C}\{z_0, \dots, z_n\}$  está formada por estos  $n$  generadores.

*Demostración:* La primera observación es que  $f_{d_{z_1}} \neq 0, \dots, f_{d_{z_n}} \neq 0$ . En efecto, si por ejemplo  $f_{d_{z_1}}$  es idénticamente cero, eso quiere decir que  $f_d$  no depende de la coordenada  $z_1$ . En estas condiciones, para que  $Sing(D)$  sea un conjunto finito se debe tener que  $f_d(z_0, 0, z_1, \dots, z_n)$  debe definir un conjunto liso en  $\mathbb{P}^{n-1}$ . De este modo, el único punto singular de  $D$  es el  $(0 : 1 : 0 : \dots : 0)$ , lo que contradice el hecho de que  $Sing(D) \subset U = \mathbb{P}^n \setminus \mathcal{Z}(z_0)$ .

Una condición suficiente para que  $\{f_{z_1}, \dots, f_{z_n}\}$  sea una base standard para el ideal  $I$  es que  $\{f_{d_{z_1}}, \dots, f_{d_{z_n}}\}$  forme una sucesión regular en el anillo  $\mathbb{C}[z_0, \dots, z_n]$ , ver [V-V] pág. 96. Como cada  $f_{d_{z_i}}$  es un polinomio homogéneo, es suficiente probar que  $\{f_{d_{z_1}}, \dots, f_{d_{z_n}}\}$  es una sucesión regular en  $\mathbb{C}[z_0, \dots, z_n]_{\mathfrak{m}}$  para todo ideal maximal  $\mathfrak{m}$  de  $\mathbb{C}[z_0, \dots, z_n]$  tal que  $J := (f_{d_{z_1}}, \dots, f_{d_{z_n}}) \subset \mathfrak{m}$ , [Kunz] pág. 55, [Matsumura] pág. 98.

En esta situación, el conjunto algebraico  $\mathcal{Z}(J)$  es de dimensión cero. Supongamos en efecto, que existe un conjunto algebraico  $Y \subset \mathcal{Z}(J)$  tal que la dimensión de  $Y$  como

conjunto algebraico de  $\mathbb{P}^n$  sea mayor o igual que 1. En este caso, usando el teorema de Bézout, la intersección  $Y \cap Z(f_{d_{z_0}}) \subset \text{Sing}(D) \subset U$  es no vacía y esto implica que  $Y \not\subset Z(z_0)$ . Sea un punto  $P = (P_0 : \dots : P_n) \in Y \cap Z(f_{d_{z_0}}) \subset \text{Sing}(D)$ , por supuesto  $P_0 \neq 0$ . Sean  $y_1, \dots, y_n$  coordenadas en el abierto afín  $U$ , y sean  $p_i = P_i/P_0$  las coordenadas afines de  $P$ . Sea  $\mathcal{O}_{Y,P}$  el anillo local de  $Y$  en  $P$ . La dimensión de Krull de  $\mathcal{O}_{Y,P}$  es mayor ó igual que uno y coincide con la dimensión de Krull del anillo

$$A := \frac{\mathbb{C}\{y_1 - p_1, \dots, y_n - p_n\}}{(f_{d_{z_1}}(1, y_1, \dots, y_n), \dots, f_{d_{z_n}}(1, y_1, \dots, y_n))}.$$

Por tanto la dimensión de  $A$  como  $\mathbb{C}$ -espacio vectorial es infinita. Ahora, esto es imposible ya que  $(p_1, \dots, p_n)$  es un punto singular aislado de  $f_d(1, y_1, \dots, y_n) = 0$ , sin más que usar la relación de Euler.

De este modo, la única posibilidad es que  $\dim Z(J)$  sea cero y en este caso, el cono afín definido por  $J$  en  $\mathbb{C}^{n+1}$  tiene solamente componentes irreducibles de dimensión uno. Estas componentes están en biyección con ideales primos  $\mathfrak{p}$  de  $\mathbb{C}[z_0, \dots, z_n]$  de altura  $n$ . Así pues, para todo ideal maximal  $\mathfrak{m}$  de  $\mathbb{C}[z_0, \dots, z_n]$  con  $J \subset \mathfrak{m}$ , tenemos que el ideal  $J\mathbb{C}[z_0, \dots, z_n]_{\mathfrak{m}}$  tiene altura  $n$  en este anillo local regular. Podemos concluir, [Kunz] pág.187, que  $J\mathbb{C}[z_0, \dots, z_n]_{\mathfrak{m}}$  es una intersección completa, condición que es suficiente para determinar que, [Girál] pág. 35,  $\{f_{d_{z_1}}, \dots, f_{d_{z_n}}\}$  forman una sucesión regular en  $\mathbb{C}[z_0, \dots, z_n]_{\mathfrak{m}}$ .  $\square$

Gracias a la Proposición de 2.1.14 se sabe que el ideal de formas iniciales del ideal  $(f_{z_1}, \dots, f_{z_n})$  está generado por las formas iniciales de estos generadores. Así, el proyectivizado del cono tangente de la curva polar,  $CT_H$ , es el esquema  $\text{Proj}(R)$ , donde  $R$  es el anillo

$$R := \text{Gr}_m\left(\frac{\mathbb{C}\{z_0, \dots, z_n\}}{(f_{z_1}, \dots, f_{z_n})}\right) \simeq \frac{\mathbb{C}[z_0, \dots, z_n]}{\text{in}(f_{z_1}, \dots, f_{z_n})} \simeq \frac{\mathbb{C}[z_0, \dots, z_n]}{(f_{d_{z_1}}, \dots, f_{d_{z_n}})}.$$

Sea  $\{P_1, \dots, P_r, P_{r+1}, \dots, P_s\}$  el soporte del esquema anterior, donde  $P_i \in \text{Sing}(D)$  si  $i = 1, \dots, r$  y el resto de los  $P_i$  no pertenecen a  $\text{Sing}(D)$ . Cada dirección de la recta tangente de cada componente irreducible de  $\Gamma_H$  puede ser interpretada como uno de los puntos de  $CT_H$ . Sea  $P \in CT_H$  y sea  $\Gamma_P$  la unión de las componentes irreducibles de  $\Gamma_H$  cuya dirección tangente está definida por el punto  $P$ ; de este modo podemos descomponer la curva polar del siguiente modo:

$$\Gamma_H = \bigcup_{P \in \text{Sing}(D)} \Gamma_P \cup \bigcup_{P \notin \text{Sing}(D)} \Gamma_P.$$

Además, el conjunto  $Z(f_{d_{z_1}}, \dots, f_{d_{z_n}}) \cap Z(z_0)$  es también vacío ya que como  $H$  es un hiperplano adecuado para  $(V, 0)$ ,  $\Gamma_H$  es transversal a  $H$  y por tanto ninguna dirección tangente de  $\Gamma_H$  puede estar contenida en  $H$ .

**2.1.15. Lema.** *En las condiciones anteriores, si  $P \in CT_H$ , la multiplicidad en el origen de  $\Gamma_P$  coincide con la multiplicidad de intersección en  $P$  de las hipersuperficies proyectivas definidas por las ecuaciones  $f_{d_{z_1}} = 0, \dots, f_{d_{z_n}} = 0$ . Además, si  $P \in \text{Sing}(D)$ , este número es el número de Milnor de  $D$  en  $P$ .*

*Demostración:* En el Corolario 5.2.2 de [H-I-O] pág. 556, se demuestra que para un germen analítico  $(X, x)$  la multiplicidad de  $X$  en  $x$  es igual a la multiplicidad del cono tangente afín  $CX$  en  $x$ . Además esta última es igual al grado de  $CX$  visto como variedad proyectiva, [H-I-O] Teorema 4.1.8 pág. 543. Si aplicamos esto a la curva polar se tiene que la multiplicidad de  $\Gamma_H$  en el origen coincide con grado de la variedad proyectiva  $C\Gamma_H$ . Como esta variedad proyectiva define puntos, para calcular el grado basta calcular la longitud de cada anillo local asociado a los puntos de intersección de las variedades  $Z(f_{d_{z_i}})$ . Sea  $\mathfrak{m}_P$  el ideal homogéneo de  $R$  asociado al punto  $P$ , entonces

$$\text{mult}_0(\Gamma_H) = \deg(C\Gamma_H) = \sum_{P \in Z(f_{d_{z_i}})} \text{long}(R_{\mathfrak{m}_P}) = \sum_{P \in Z(f_{d_{z_i}})} \text{long}\left(\frac{\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n, P}}{(f_{d_{z_1}}, \dots, f_{d_{z_n}})}\right)$$

donde  $i \in \{1, \dots, n\}$ . Para calcular la longitud de  $R_{\mathfrak{m}_P}$  basta calcular la dimensión como  $\mathbb{C}$ -espacio vectorial de

$$\frac{\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n, P}}{(f_{d_{z_1}}, \dots, f_{d_{z_n}})}.$$

Cuando  $P \in C\Gamma_H$ , como  $P \notin H$ , para calcular la dimensión usamos las ecuaciones locales

$$f_{d_{z_i}}(1, y_1, \dots, y_n) = 0,$$

Si  $P \in \text{Sing}(D)$ , la dimensión del anillo local coincide con la dimensión del completado que no es ni más ni menos que el número de Milnor de  $D$  en  $P$ . Para  $\Gamma_P$  se aplica la misma idea al anillo  $R_{\mathfrak{m}_P}$ .  $\square$

Con la descripción anterior del cono tangente de la curva polar, se puede dar una cota para el supremo de los cocientes  $\frac{e_q}{m_q}$ .

**2.1.16. Teorema.** *Sea  $f \in \mathbb{C}\{z_0, \dots, z_n\}$  un germen de función analítica tal que su lugar de ceros define un germen de hipersuperficie  $(V, 0) \subset (\mathbb{C}^{n+1}, 0)$  con singularidad aislada. Si el cono tangente  $D$  de  $(V, 0)$  en el origen define en  $\mathbb{P}^n$  una hipersuperficie con singularidades aisladas, entonces:*

$$\sup\left\{\frac{e_q}{m_q} : \gamma_q \text{ componente de } \Gamma_H\right\} \leq \text{mult}_0(V) + \sup\{\mu(\tilde{V}, \tilde{P}) : P \in \text{Sing}(D)\}$$

donde  $\tilde{V}$  es la transformada estricta de  $V$  al realizar la transformación cuadrática de centro el origen.

*Demostración:* Sea  $f = f_d + f_{d+1} + \dots$  la descomposición de  $f$  como suma de sus componentes homogéneas. La multiplicidad de  $(V, 0)$  es  $d$  y el cono tangente  $D$  viene determinado en  $\mathbb{P}^n$  por  $f_d$ . Se considera  $W$  el abierto de hiperplanos adecuados para  $(V, 0)$ . Para todo hiperplano  $H \in W$ , la curva polar  $\Gamma_H$  asociada a  $f$  y a  $H$  es una intersección completa, transversal a  $H$  y que admite una descomposición  $\Gamma_H = \bigcup_{q=1}^r \gamma_q$  en  $r$  componentes irreducibles, siendo este  $r$  constante para los hiperplanos de  $W$ .

Sea  $H \in W$ . Realizamos un cambio de coordenadas proyectivas de modo que  $H = \{z_0 = 0\}$ . En estas condiciones, la curva polar  $\Gamma_H$  viene definida como el germen de curva en el origen que definen  $f_{z_1} = 0, \dots, f_{z_n} = 0$ . Además,  $\text{Sing}(D) \subset \mathbb{P}^n \setminus \mathcal{Z}(z_0)$  y por tanto se puede aplicar la Proposición de 2.1.14. Tenemos pues, una descomposición de la curva polar de la forma  $\Gamma_H = \cup \Gamma_P$ ,  $P \in \mathcal{Z}(f_{d_{z_1}}, \dots, f_{d_{z_n}})$ , donde ya sabemos que cada

$$\Gamma_P = \bigcup_{q=1}^s \gamma_q^P,$$

y  $\gamma_q^P$  es un germen de curva irreducible con dirección tangente definida por  $P$ .

Sea  $P \in \mathcal{Z}(f_{d_{z_1}}, \dots, f_{d_{z_n}})$ , por la condición de transversalidad de la curva polar, se sabe que ninguna recta tangente a las componentes irreducibles de  $\Gamma_H$  está contenida en  $H$ , por lo que  $P$  tiene la coordenada correspondiente a  $z_0$  no nula. Así, se puede realizar otro cambio proyectivo de coordenadas de modo que deje fijo  $H$  y que  $P$  tenga coordenadas proyectivas  $(1 : 0 : \dots : 0)$ .

Sea  $\gamma_q^P$  una componente irreducible de  $\Gamma_P$ . Como la dirección de la recta tangente a  $\gamma_q^P$  en el origen es  $(1 : 0 : \dots : 0)$  y la multiplicidad de  $\gamma_q^P$  en el origen es igual a  $m_q$ , entonces una parametrización de la curva  $\gamma_q^P$  vendrá dada por un germen de función  $h_q : (\mathbb{C}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^{n+1}, 0)$  definido como sigue

$$h_q(t) = (t^{m_q}, h_q^1(t), \dots, h_q^n(t)),$$

donde, para todo  $i \in \{1, \dots, n\}$ ,  $\text{ord}_t h_q^i(t) > m_q$ .

Por otro lado, por definición de los invariantes polares, se tiene que

$$e_q + m_q = (\gamma_q^P, V)_0 = \text{ord}_t(f \circ h_q(t)) = \text{ord}_t \left( \frac{\partial(f \circ h_q)}{\partial t}(t) \right) + 1.$$

Para calcular esta derivada parcial aplicamos la regla de la cadena,

$$\frac{\partial(f \circ h_q)}{\partial t}(t) = f_{z_0}(h_q(t)) \cdot (m_q \cdot t^{m_q-1}) + \sum_{i=1}^n \left( f_{z_i}(h_q(t)) \cdot \left( \frac{\partial h_q^i}{\partial t} \right)(t) \right).$$

El germen de curva  $\gamma_q^P$  es una componente de la curva polar, así, para cada  $i \in \{1, \dots, n\}$ , la composición  $f_{z_i}(h_q(t))$  es idénticamente cero. Se tiene por tanto

$$e_q + m_q = \text{ord}_t(f_{z_0}(h_q(t))) + m_q.$$

De este modo,

$$(2.3) \quad e_q = \text{ord}_t(f_{z_0}(h_q(t))) = (\gamma_q^P, S)_0,$$

donde  $(S, 0)$  es el germen de hipersuperficie definido por  $f_{z_0} = 0$ . Distingamos dos casos según  $P$  sea, ó no, singular para  $D$ .

- (a) Si  $P \notin \text{Sing}(D)$ , los gérmenes  $\gamma_q^P$  y  $(S, 0)$  tienen intersección transversal, ya que  $P$  no pertenece a  $\mathcal{Z}(f_{d_{z_0}})$ . Por tanto su multiplicidad de intersección en el origen es el producto de las multiplicidades, es decir

$$e_q = (\gamma_q^P, S)_0 = \text{mult}_0(\gamma_q^P) \cdot \text{mult}_0(S) = m_q(d-1).$$



De este modo obtenemos que para cada componente  $\gamma_q^P$  de la curva polar tal que  $P \notin \text{Sing}(D)$  se tiene que

$$(2.4) \quad \frac{e_q}{m_q} = d - 1.$$

- (b) Sea ahora  $P \in \text{Sing}(D)$ , y sea  $\gamma_q^P$  una componente irreducible de  $\Gamma_P$ . Sea  $\pi : (\widetilde{\mathbb{C}^{n+1}}, E) \rightarrow (\mathbb{C}^{n+1}, 0)$  la transformación cuadrática de centro el origen. Como  $P$  tiene coordenadas  $(1 : 0 : \dots : 0)$ , la transformada estricta  $\tilde{\gamma}_q^P$  de la curva  $\gamma_q^P$  está en la carta donde  $\pi$  tiene la siguiente expresión en coordenadas locales

$$\pi(x_0, \dots, x_n) = (x_0, x_1 x_0, \dots, x_n x_0).$$

Además, ver [Campillo] pág 32, una parametrización de  $\tilde{\gamma}_q^P$  está dada en este caso por

$$\begin{array}{ccc} \tilde{h}_q : (\mathbb{C}, 0) & \longrightarrow & (\widetilde{\mathbb{C}^{n+1}}, E) \\ t & \longrightarrow & (t^{m_q}, \frac{h_1(t)}{t^{m_q}}, \dots, \frac{h_n(t)}{t^{m_q}}) \end{array}$$

En particular, se tiene el siguiente diagrama conmutativo,

$$\begin{array}{ccccc} & & (\widetilde{\mathbb{C}^{n+1}}, E) & & \\ & \nearrow \tilde{h}_q & \downarrow \pi & & \\ (\mathbb{C}, 0) & \xrightarrow{h_q} & (\mathbb{C}^{n+1}, 0) & \xrightarrow{f} & (\mathbb{C}, 0) \end{array}$$

De este modo,

$$(2.5) \quad e_q + m_q = (\gamma_q^P, Z)_0 = \text{ord}_t(f \circ h_q(t)) = \text{ord}_t(f \circ \pi \circ \tilde{h}_q(t)).$$

Por otro lado, la composición de  $f$  y  $\pi$  nos da

$$f \circ \pi(x_0, \dots, x_n) = f(x_0, x_1 x_0, \dots, x_n x_0) = x_0^d \cdot \tilde{f}(x_0, \dots, x_n),$$

donde  $\tilde{f} = 0$  es una ecuación de  $\tilde{V}$  en un entorno del punto  $P$ . Así,

$$(2.6) \quad \text{ord}_t(f \circ \pi \circ \tilde{h}_q(t)) = \text{ord}_t((x_0^d \cdot \tilde{f}) \circ (\tilde{h}_q(t))) = d \cdot m_q + \text{ord}_t(\tilde{f}(\tilde{h}_q(t))).$$

Por otro lado, ver [H-I-O] Proposición 13.13, como  $\Gamma_H = \mathcal{Z}(f_{z_1}, \dots, f_{z_n})$  y  $f_{z_1}, \dots, f_{z_n}$  forman una base standard para el ideal que definen, se tiene que la transformada estricta  $\tilde{\Gamma}_H$  de  $\Gamma_H$  mediante  $\pi$  es el lugar de ceros de  $\tilde{f}_{z_1}, \dots, \tilde{f}_{z_n}$ , donde

$$x_0^d \cdot \tilde{f}_{z_i}(x_0, \dots, x_n) = f_{z_i}(x_0, x_1 x_0, \dots, x_n x_0),$$

con lo que

$$\tilde{f}_{z_i}(x_0, \dots, x_n) = f_{d_{z_i}}(1, x_1, \dots, x_n) + x_0 \cdot f_{d+1_{z_i}}(1, x_1, \dots, x_n) + \dots$$

Si se calcula la derivada parcial de  $\tilde{f}$  respecto de  $x_i$ ,  $1 \leq i \leq n$ , se tiene

$$\begin{aligned} (\tilde{f})_{x_i} &= \frac{\partial}{\partial x_i} (f_d(1, x_1, \dots, x_n) + x_0 \cdot f_{d+1}(1, x_1, \dots, x_n) + \dots) \\ &= f_{d_{x_i}}(1, x_1, \dots, x_n) + x_0 \cdot f_{d+1_{x_i}}(1, x_1, \dots, x_n) + \dots \end{aligned}$$

Como se deriva respecto de una variable distinta de la variable respecto de la cual se afiniza, entonces

$$(\tilde{f})_{x_i}(x_0, \dots, x_n) = \tilde{f}_{z_i}(x_0, \dots, x_n).$$

Por tanto,  $\tilde{\Gamma}_H$  es el lugar de ceros de  $(\tilde{f})_{x_1}, \dots, (\tilde{f})_{x_n}$ . Además,  $\tilde{\gamma}_q^P$  es una componente de  $\tilde{\Gamma}_H$  lo que hace que, para todo  $i \in \{1, \dots, n\}$ , se tenga

$$(\tilde{f})_{x_i} \circ \tilde{h}_q(t) \equiv 0.$$

Para calcular  $\text{ord}_t(\tilde{f} \circ \tilde{h}_q)$  se vuelve a derivar, se vuelve a usar la regla de la cadena y se aplica esta última identidad, es decir,

$$(2.7) \quad \text{ord}_t(\tilde{f} \circ \tilde{h}_q) = \text{ord}_t \left( \frac{\partial(\tilde{f} \circ \tilde{h}_q)}{\partial t} \right) + 1 = \text{ord}_t \left( ((\tilde{f})_{x_0} \circ \tilde{h}_q)(t) \cdot \frac{\partial(t^{m_q})}{\partial t} \right) + 1$$

Usando las tres identidades (2.5), (2.6) y (2.7), se obtiene que

$$(2.8) \quad e_q = d \cdot m_q + \text{ord}_t((\tilde{f})_{x_0} \circ \tilde{h}_q(t)).$$

Diviendi ahora esta igualdad por  $m_q$ , el cociente

$$(2.9) \quad \frac{e_q}{m_q} = d + \frac{\text{ord}_t((\tilde{f})_{x_0} \circ \tilde{h}_q(t))}{m_q}.$$

Relacionemos esta última igualdad con el número de Milnor de  $\tilde{V}$  en  $\tilde{P}$ . Por el Lema de 2.1.2,  $\tilde{V}$  tiene en  $\tilde{P}$  una singularidad aislada, se puede calcular su número de Milnor. Para calcularlo hace falta una ecuación local de  $\tilde{V}$  en  $\tilde{P}$ . La ecuación es  $\tilde{f} = 0$ ;  $\tilde{P}$  en estas coordenadas es el origen por lo que su número de Milnor es

$$\mu(\tilde{V}, \tilde{P}) = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathbb{C}\{x_0, \dots, x_n\}}{(\tilde{f}_{x_0}, \dots, \tilde{f}_{x_n})}.$$

Como  $\tilde{\Gamma}_H$  viene definida como el lugar de ceros de  $(\tilde{f})_{x_1}, \dots, (\tilde{f})_{x_n}$ , se tiene que

$$(2.10) \quad \mu(\tilde{V}, \tilde{P}) = (\tilde{f}_{x_0}, \tilde{\Gamma}_H)_0 = \sum_{\gamma_q^P} \text{ord}_t((\tilde{f})_{x_0} \circ \tilde{h}_q(t)).$$

Como  $m_q$  es mayor ó igual que uno, se puede acotar el cociente  $\frac{\text{ord}_t((\tilde{f})_{x_0} \circ \tilde{h}_q(t))}{m_q}$  por  $\mu(\tilde{V}, \tilde{P})$  y obtener el resultado pedido de (2.9)

$$\frac{e_q}{m_q} \leq d + \mu(\tilde{V}, \tilde{P}).$$

□

**Scholium.** En las condiciones del teorema, si  $D$  no tiene ninguna singularidad, entonces  $(V, 0)$  tiene todos los cocientes  $\frac{e_q}{m_q}$  iguales a  $d - 1$ . El siguiente resultado de Teissier, [Teissier 2] Corolario 2.6, va a permitir decir algo más sobre estas singularidades.

**2.1.17. Corolario.** [Teissier 2]. Sea  $f(z_0, \dots, z_n) = 0$  una ecuación de un germen de hipersuperficie con singularidad aislada  $(V, 0)$ . Una condición necesaria y suficiente para que  $(V, 0)$  sea  $(c)$ -secante a una hipersuperficie del tipo  $f'(z_1, \dots, z_n) + z_0^N = 0$ , tal que, además,  $z_0 = 0$  sea la ecuación de un hiperplano adecuado, es que los cocientes  $\{\frac{e_q}{m_q}\}$  sean todos iguales a un mismo entero  $N$ .

En la demostración del Corolario anterior Teissier muestra que  $f'$  se consigue del siguiente modo: si  $H$  es un hiperplano adecuado para  $(V, 0)$  y tiene por ecuación  $z_0 = 0$ , la singularidad  $(V, 0)$  es  $(c)$ -secante a la singularidad definida por la ecuación  $f(0, z_1, \dots, z_n) + z_0^N = 0$ . Esto último para nuestro caso nos da que  $(V, 0)$  es  $(c)$ -secante a la singularidad definida por la ecuación  $f(0, z_1, \dots, z_n) + z_0^d = 0$ , y  $z_0 = 0$  es la ecuación de un hiperplano adecuado para  $(V, 0)$ . Por tanto  $(V, 0)$  es topológicamente equivalente a la singularidad definida por la ecuación  $f(0, z_1, \dots, z_n) + z_0^d = 0$ .

La descripción que se ha hecho de los invariantes polares en el teorema anterior va a permitir dar una relación entre el número de Milnor del germen  $(V, 0)$  y la suma de los números de Milnor de  $\tilde{V}$  en sus puntos singulares. Primero de todo, como la multiplicidad de la curva polar coincide con el número de Milnor de una sección hiperplana genérica, estudiemos las secciones hiperplanas.

**2.1.18. Lema.** Sea  $f \in \mathbb{C}\{z_0, \dots, z_n\}$  un germen de función analítica tal que su lugar de ceros define un germen de hipersuperficie  $(V, 0) \subset (\mathbb{C}^{n+1}, 0)$  con singularidad aislada. Si el cono tangente  $D$  de  $(V, 0)$  en el origen define en  $\mathbb{P}^n$  una hipersuperficie con singularidades aisladas, entonces el tipo topológico de una sección hiperplana genérica  $(Z \cap H, 0)$  es el mismo que el tipo topológico de  $(D \cap H, 0)$  y  $\mu^{(i)}(Z \cap H, 0) = (d - 1)^i$  para todo  $i \in \{1, \dots, n\}$ .

*Demostración:* Elegimos  $W$  el abierto de hiperplanos adecuados para  $(V, 0)$ . Dado un hiperplano  $H \in W$ , tenemos que  $D \cap H$  es una variedad lisa de  $\mathbb{P}^{n-1}$ . De este modo, si  $H$

tiene por ecuación  $\{z_0 = 0\}$ , entonces el germen  $(Z \cap H, 0) \subset (\mathbb{C}^n, 0)$  viene definido por el germen de función  $f(0, z_1, \dots, z_n)$ .

Su cono tangente,  $D \cap H$ , es liso y por tanto se puede aplicar el scholium del teorema anterior. Obtenemos que  $(Z \cap H, 0)$  es  $(c)$ -secante a la singularidad definida por la ecuación  $f(0, 0, z_2, \dots, z_n) + z_1^d = 0$ , donde  $\{z_1 = 0\}$  es una ecuación de un hiperplano genérico de  $\mathbb{C}^n$ . De este modo, el germen definido como sección hiperplana de  $(Z \cap H, 0)$  tiene por ecuación  $f(0, 0, z_2, \dots, z_n) = 0$ , con cono tangente liso, por lo que se puede volver a aplicar el resultado del teorema anterior y del scholium. Así,  $(Z \cap H, 0) \subset (\mathbb{C}^n, 0)$  es  $(c)$ -secante con el germen definido por los ceros de

$$f(0, 0, 0, z_3, \dots, z_n) + z_1^d + z_2^d = 0,$$

y  $\{z_1 = z_2 = 0\}$  es la ecuación de un  $n - 2$ -plano genérico para esta hipersuperficie. Si aplicamos sucesivamente este resultado obtenemos que  $(Z \cap H, 0) \subset (\mathbb{C}^n, 0)$  es  $(c)$ -secante al germen definido por  $z_1^d + z_2^d + \dots + z_n^d = 0$ , ver [Teissier 2] Corolario de 2.7. Además, una ecuación de un  $i$ -plano genérico viene definida por  $\{z_1 = \dots = z_{n-i} = 0\}$  por lo que

$$\mu^{(i)}(Z \cap H, 0) = (d - 1)^i.$$

□

El Lema de 2.1.2 asegura si tenemos una singularidad aislada  $(V, 0)$  cuyo cono tangente  $D$  tiene singularidades aisladas, la transformada estricta  $\tilde{V}$  de  $V$  tiene singularidades aisladas. Denotaremos por  $\mu(D)$  la suma de los números de Milnor de la hipersuperficie  $D \subset \mathbb{P}^n$  en sus puntos singulares y por  $\mu(\tilde{V})$  la suma de los números de Milnor de la hipersuperficie  $\tilde{V} \subset \widetilde{\mathbb{C}^{n+1}}$  en sus puntos singulares. El siguiente teorema da una relación entre el número de Milnor de  $V$  en el origen, la multiplicidad de  $V$  en el origen,  $\mu(D)$  y  $\mu(\tilde{V})$ .

**2.1.19. Teorema.** *Sea  $f \in \mathbb{C}\{z_0, \dots, z_n\}$  un germen de función analítica tal que su lugar de ceros define un germen de hipersuperficie  $(V, 0) \subset (\mathbb{C}^{n+1}, 0)$  con singularidad aislada de multiplicidad  $d$ . Si el cono tangente  $D$  de  $(V, 0)$  en el origen define en  $\mathbb{P}^n$  una hipersuperficie con singularidades aisladas, entonces:*

$$\mu(V, 0) = (d - 1)^{n+1} + \mu(D) + \mu(\tilde{V}).$$

*Demostración:* Sea  $f = f_d + f_{d+1} + \dots$  la descomposición de  $f$  como suma de sus componentes homogéneas. El cono tangente  $D$  viene determinado en  $\mathbb{P}^n$  por  $f_d$ . Consideramos  $W$  el abierto hiperplanos adecuados para  $(V, 0)$ .

Sea  $H \in W$ . Realizamos un cambio de coordenadas proyectivas de modo que  $H = \{z_0 = 0\}$ . En estas condiciones la curva polar  $\Gamma_H$  viene definida como el germen de curva en el origen que definen  $f_{z_1} = 0, \dots, f_{z_n} = 0$ . Además,  $Sing(D) \subset \mathbb{P}^n \setminus Z(z_0)$  y por tanto se puede aplicar la Proposición de 2.1.14 y el Lema de 2.1.15. Se tiene pues, una descomposición de la curva polar de la forma  $\Gamma_H = \cup \Gamma_P$ ,  $P \in Z(f_{d_{z_1}}, \dots, f_{d_{z_n}})$ , donde ya sabemos que cada

$$\Gamma_P = \bigcup_{q=1}^s \gamma_q^P,$$

y  $\gamma_q^P$  es un germen de curva irreducible cuya recta tangente tiene la dirección de  $P$ . Además usando el Lema de 2.1.18 se tiene que

$$(d-1)^n = \mu^n(V, 0) = \sum m_q = \sum \text{mult}_0(\Gamma_P) = \sum_{P \notin \text{Sing}(D)} \text{mult}_0(\Gamma_P) + \sum_{P \in \text{Sing}(D)} \text{mult}_0(\Gamma_P).$$

Usando el Lema de 2.1.15,

$$(2.11) \quad \sum_{P \notin \text{Sing}(D)} \text{mult}_0(\Gamma_P) = (d-1)^n - \sum_{P \in \text{Sing}(D)} \mu_P(D).$$

Sea de nuevo el germen de hipersuperficie  $(S, 0) \subset (\mathbb{C}^{n+1}, 0)$  dado por la ecuación  $f_{z_0} = 0$ . Al ser una hipersuperficie, el proyectivizado de su cono tangente viene dado por  $\mathcal{Z}(f_{d_{z_0}}) \subset \mathbb{P}^n$ . La definición algebraica local del número de Milnor de  $(V, 0)$ , nos da

$$\mu(V, 0) = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathbb{C}\{z_0, \dots, z_n\}}{(f_{z_0}, \dots, f_{z_n})} = \text{long} \left( \frac{\mathcal{O}_{\Gamma_H, 0}}{(\overline{f_{z_0}})} \right) = (\Gamma_H, S)_0.$$

Sabemos que si  $P \notin \text{Sing}(D)$  la intersección de los gérmenes  $S$  y  $\Gamma_P$  es transversal, ya que la intersección de sus conos tangentes proyectivizados es vacío. En este caso,  $(\Gamma_P, S)_0$  es el producto de las multiplicidades de ambos gérmenes en el origen. Usando (2.11) tenemos que el número de Milnor es igual a

$$\begin{aligned} \mu(V, 0) = (\Gamma_H, S)_0 &= \sum_{P \notin \text{Sing}(D)} (\Gamma_P, S)_0 + \sum_{P \in \text{Sing}(D)} (\Gamma_P, S)_0 \\ &= \sum_{P \notin \text{Sing}(D)} \text{mult}_0(\Gamma_P) \cdot \text{mult}_0(S) + \sum_{P \in \text{Sing}(D)} (\Gamma_P, S)_0 \\ (2.12) \quad &= (d-1)^{n+1} - (d-1) \sum_{P \in \text{Sing}(D)} \mu_P + \sum_{P \in \text{Sing}(D)} (\Gamma_P, S)_0 \end{aligned}$$

Aplicando (2.3) y (2.8), para cada  $P$  que sea punto singular de  $D$ , se tiene

$$\begin{aligned} (\Gamma_P, S)_0 &= \sum_{\gamma_q \in \Gamma_P} (\gamma_q, S)_0 = \sum_{\gamma_q \in \Gamma_P} e_q \\ &= \sum_{\gamma_q \in \Gamma_P} \left( d \cdot m_q + \text{ord}_t((\tilde{f})_{x_0} \circ \bar{h}_q(t)) \right) \\ &= d \sum_{\gamma_q \in \Gamma_P} m_q + \sum_{\gamma_q \in \Gamma_P} \text{ord}_t((\tilde{f})_{x_0} \circ \bar{h}_q(t)) \\ &= d\mu(D, P) + \sum_{\gamma_q \in \Gamma_P} \text{ord}_t((\tilde{f})_{x_0} \circ \bar{h}_q(t)) \end{aligned}$$

Aplicando el Lema de 2.1.15 y (2.10) a la anterior igualdad se tiene que

$$(\Gamma_P, S)_0 = d\mu(D, P) + \mu(\tilde{V}, \tilde{P}).$$

Finalmente sustituyendo esta última igualdad en (2.12) se obtiene el resultado del teorema.  $\square$

## 2.2 Familias de hipersuperficies

El propósito de esta sección es dar una descripción de aquellas deformaciones de un germen de hipersuperficie  $(V_0, 0) \subset (\mathbb{C}^{n+1}, 0)$  que mantengan el número de Milnor y la multiplicidad constante. Esta descripción va a ser una consecuencia del Lema de 2.1.18, del Teorema de 2.1.19 y de la semicontinuidad del número de Milnor.

Sea  $(V_0, 0) \subset (\mathbb{C}^{n+1}, 0)$  un germen de hipersuperficie con singularidad aislada. Sea  $\mathbb{D} = \{t \in \mathbb{C} : |t| < \epsilon\}$  un entorno abierto del origen en  $\mathbb{C}$ . Sea  $p : \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{D}$  una deformación plana del germen de hipersuperficie  $(V_0, 0)$ , es decir,  $p$  es un morfismo plano y por tanto el germen  $(\mathcal{B}, 0)$  tiene dimensión pura  $n + 1$  y  $(V_0, 0) = (p^{-1}(0), 0)$ .

Supongamos que hemos elegido un buen representante para el germen  $p$ . se puede ver  $V_0$  sumergido en una bola abierta  $B_0$  de  $\mathbb{C}^{n+1}$  de centro el origen. Supongamos que  $\mathcal{B}$  es un subconjunto analítico cerrado de  $B = B_0 \times \mathbb{D}$  y que  $p : \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{D}$  es la restricción de la proyección sobre  $\mathbb{D}$ . Denotaremos por  $C(p) \subset \mathcal{B}$  al conjunto de los puntos críticos de  $p$ , que contiene al conjunto de puntos singulares de  $\mathcal{B}$ .

Si  $B_0$  es una bola de  $\mathbb{C}^{n+1}$  suficientemente pequeña y  $\mathbb{D}$  es suficientemente pequeño con respecto a  $B_0$ , se puede suponer que se cumple lo siguiente:

- (i)  $\mathcal{B}$  y  $V_0$  son contractibles ya que son conjuntos analíticos, ver [Dimca] Teorema de 5.1, y  $V_0 \setminus \{0\}$  es liso ya que  $B_0$  es suficientemente pequeña y  $(V_0, 0)$  tiene singularidad aislada.
- (ii) Como el morfismo  $p$  es plano, la aplicación  $p$  restringida a  $C(p)$  nos da un morfismo finito,  $p|_{C(p)} : C(p) \rightarrow \mathbb{D}$ , ya que  $p|_{C(p)}^{-1}(0)$  es un conjunto discreto y por el Teorema de caracterización local de morfismos finitos, [K-K] pág. 164, se puede ver la restricción de  $p$  como un morfismo finito.
- (iii)  $\partial B_0 \times \{t\}$  interseca a cada fibra  $V_t := p^{-1}(t)$  transversalmente en puntos regulares de  $V_t$  para cada  $t \in \mathbb{D}$ , y cada esfera  $S_\epsilon^{2n+1} \subset B_0$  con centro el origen interseca a  $V_0$  transversalmente, esto es consecuencia del Corolario 2.9 de [Milnor].

Bajo estas hipótesis la dimensión de  $C(p)$  es menor ó igual que uno y las fibras  $V_t$ ,  $t \in \mathbb{D}$ , son conjuntos analíticos de dimensión  $n$  con, como mucho, singularidades aisladas.

De este modo, se tiene el siguiente diagrama commutativo

$$\begin{array}{ccc}
 (\mathcal{B}, 0) & \xrightarrow{\quad} & (\mathbb{C}^{n+1} \times \mathbb{D}, 0) \\
 & \searrow p & \swarrow \pi \\
 & (\mathbb{D}, 0) &
 \end{array}$$

donde  $(\mathcal{B}, 0)$  está definido por  $F = 0$ ,  $F \in \mathbb{C}\{z_0, \dots, z_n, t\}$ . Sea  $J$  el ideal generado por  $\frac{\partial F}{\partial z_0}, \dots, \frac{\partial F}{\partial z_n}$ , y sea  $P$  el subespacio de  $(\mathbb{C}^{n+1} \times \mathbb{D}, 0)$  definido por  $J$ . El conjunto  $P$  es finito sobre  $\mathbb{D}$ , sin más que aplicar la idea del apartado (ii) anterior. Así, para cada  $t \in \mathbb{D}$ ,  $\pi^{-1}(t) \cap P$  es un conjunto finito de puntos  $x_i$ . Los anillos locales  $\mathcal{O}_{x_i \cap P}$  son

artinianos, es decir,  $\mathbb{C}$ -espacios vectoriales de dimensión finita. El valor

$$\sum_{x_i \in \pi^{-1}(t) \cap P} \dim_{\mathbb{C}} (\mathcal{O}_{x_i \cap P})$$

es independiente de  $t \in \mathbb{D}$  y por tanto igual al número de Milnor de  $V_0$  en el origen, ya que  $(V_0, 0)$  tiene singularidad aislada en el origen.

Los puntos singulares de  $V_t$  son los puntos de  $p^{-1}(t) \cap P$ , los cuales son algunos de los  $x_i \in \pi^{-1}(t) \cap P$ . Si  $x_i \in p^{-1}(t) \cap P$ , la  $\dim_{\mathbb{C}} (\mathcal{O}_{x_i \cap P})$  coincide con el número de Milnor de  $V_t$  en  $x_i$ . Así, para todo  $t \in \mathbb{D}$ , si los  $x_i$  son los puntos singulares de la fibra  $V_t$ , entonces tenemos la *semicontinuidad del número de Milnor*:

$$(2.13) \quad \mu(V, 0) \geq \sum_{x_i \in V_t} \mu(V_t, x_i)$$

Si se impone la condición de que la anterior desigualdad sea una igualdad se obtiene el criterio de irreducibilidad del lugar singular de Lé, ver [Lé 1] Teorema A y Teorema B.

**2.2.1. Teorema. [Lé 1].** *Sea  $(H_t)_{t \in \mathbb{D}}$  una familia analítica compleja de hipersuperficies analíticas complejas definidas en un abierto  $U$  de  $\mathbb{C}^{n+1}$ , tal que  $H_t$  sólo tiene singularidades aisladas. Sea  $B$  una bola contenida en  $U$  tal que  $H_0 \cap B$  sólo contiene al origen como punto singular de  $H_0$ . Entonces, para todo  $t$  suficientemente pequeño,  $H_t \cap B$  tiene  $k_t$  puntos singulares  $x_1(t), \dots, x_{k_t}(t)$ . Sean  $\mu_1(t), \dots, \mu_{k_t}(t)$  los números de Milnor de estos puntos singulares. Si, para todo  $t$  suficientemente pequeño, se tiene que*

$$\sum_{i=1}^{k_t} \mu_i(t) = \mu(H_0, 0)$$

*entonces  $k_t = 1$  y  $\mu_1(t) = \mu(H_0, 0)$ , para todo  $t$  suficientemente pequeño.*

De este modo, si la deformación  $p : \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{D}$  tiene número de Milnor constante, existe una única sección  $\sigma : \mathbb{D} \rightarrow \mathcal{B}$  tal que  $(V_t, \sigma^{-1}(t))$  tiene una singularidad aislada con número de Milnor independiente de  $t$ .

**2.2.2. Teorema.** *En las condiciones anteriores, si además el cono tangente  $D_0$  de  $(V_0, 0)$  en el origen define en  $\mathbb{P}^n$  una hipersuperficie con singularidades aisladas, entonces las tres condiciones siguientes son equivalentes*

- (i) *La familia de secciones hiperplanas genéricas tiene número de Milnor constante.*
- (ii) *La multiplicidad de  $V_t$  en  $\sigma^{-1}(t)$  es constante.*
- (iii) *La familia de secciones hiperplanas genéricas tiene la sucesión  $\mu^*$  de números de Milnor constante.*

*Demostración:* (i) implica (ii). Sea  $H$  un hiperplano genérico para  $(V_0, 0)$ . Para  $t$  suficientemente pequeño, el hiperplano  $H \times \{t\}$  es genérico para  $(V_t, 0)$ . Como  $D_0$  tiene sólo singularidades aisladas, se ha visto en el Scholium del Lema de 2.1.18 que la sección hiperplana genérica de  $V_0$  es  $(c)$ -secante al cono  $(D_0 \cap H, 0)$ . De este modo se tiene una

deformación de  $(V_t \cap H, \sigma^{-1}(t))$  hacia el cono  $(D_0 \cap H, 0)$  con número de Milnor constante. El cono define una singularidad aislada homogénea y para esta singularidades las deformaciones con número de Milnor constante mantienen la multiplicidad constante, ver [Greuel] ó [O'Shea]. Por tanto, para todo  $t \in \mathbb{D}$ , la multiplicidad de  $(V_t \cap H, \sigma^{-1}(t))$  es constante e igual a  $d$ . Para finalizar la demostración, basta observar que, como  $H$  es un hiperplano genérico, la multiplicidad de  $(V_t, \sigma^{-1}(t))$  coincide con la multiplicidad de  $(V_t \cap H, \sigma^{-1}(t))$ .

(ii) implica (iii). Supongamos que  $p$  es una deformación que conserva el número de Milnor y la multiplicidad. se puede realizar un cambio de coordenadas de modo que  $\sigma(t) = (0, \dots, 0, t)$ , es decir  $\sigma(\mathcal{T})$  está definido por  $z_0 = 0, \dots, z_n = 0$ . Sea  $F(z_0, \dots, z_n, t) = 0$  la ecuación de  $\mathcal{B}$  y  $p(z_0, \dots, z_n, t) = t$ . Como la multiplicidad es constante se puede escribir

$$F(z_0, \dots, z_n, t) = F_d(z_0, \dots, z_n, t) + F_{d+1}(z_0, \dots, z_n, t) + \dots$$

donde cada  $F_i$  es polinomio homogéneo de grado  $i$  con coeficientes en  $\mathbb{C}\{t\}$ . La ecuación  $F_d(z_0, \dots, z_n, t) = 0$  define una familia  $\mathcal{D} = \{D_t\}_{t \in \mathbb{D}}$  de hipersuperficies de  $\mathbb{P}^n$  sobre  $\mathbb{D}$ . La condición (iii) estará demostrada si esta familia  $\{D_t\}$  tiene a lo más singularidades aisladas ya que luego aplicamos el Lema de 2.1.18. Sea  $P$  el subconjunto analítico de  $\mathbb{P}^n \times \mathbb{D}$  definido por la anulación de los gérmenes  $\frac{\partial F_d}{\partial z_0}, \dots, \frac{\partial F_d}{\partial z_n}$ . La proyección da un morfismo finito entre  $P$  y  $\mathbb{D}$  sin más que aplicar el Teorema de caracterización local de morfismos finitos, [K-K] pág. 164, ya que la preimagen del origen es un conjunto discreto. De este modo para cada  $t \in \mathbb{D}$ , el conjunto  $D_t \cap P$  es finito.

(iii) implica (i) es inmediato por definición. □

En el siguiente teorema se dan condiciones necesarias para que una deformación tenga número de Milnor constante y multiplicidad constante.

Sea  $(V_0, 0)$  un germen de hipersuperficie con singularidad aislada tal que  $D_0$  tenga singularidades aisladas. Sea una deformación  $p : \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{D}$  del germen  $(V_0, 0)$  que tenga número de Milnor constante y multiplicidad constante. Entonces existe una sección  $\sigma : \mathbb{D} \rightarrow \mathcal{B}$  tal que  $(V_t, \sigma^{-1}(t))$  tiene una singularidad aislada con número de Milnor constante. Se puede realizar un cambio de coordenadas de modo que  $\sigma(t) = (0, \dots, 0, t)$ , es decir,  $\sigma(\mathbb{D})$  está definido por  $z_0 = 0, \dots, z_n = 0$ . Sea  $F(z_0, \dots, z_n, t) = 0$  la ecuación de  $\mathcal{B}$  y  $p(z_0, \dots, z_n, t) = t$ . Como la multiplicidad es constante se puede escribir

$$F(z_0, \dots, z_n, t) = F_d(z_0, \dots, z_n, t) + F_{d+1}(z_0, \dots, z_n, t) + \dots$$

Se ha visto también en el teorema anterior que la ecuación  $F_d(z_0, \dots, z_n, t) = 0$  define una familia  $\mathcal{D} = \{D_t\}_{t \in \mathbb{D}}$  de hipersuperficies de  $\mathbb{P}^n$  sobre  $\mathbb{D}$ , tales que cada  $D_t$  tiene sólo singularidades aisladas.

Como la multiplicidad es constante se puede realizar la transformación monoidal a lo largo del eje singular  $(0, 0, 0, t)$ . Sea  $\pi : \tilde{\mathcal{B}} \rightarrow \mathcal{B}$  esta transformación. Sea  $P$  un punto singular de  $D_0$ . Supongamos que  $P$  tiene coordenadas homogéneas  $(1 : 0 : \dots : 0)$ . Sea el correspondiente punto  $\tilde{P}$  de  $\tilde{\mathcal{B}}$ . En un entorno de  $\tilde{P}$  la transformación monoidal está



dada del siguiente modo  $\pi(x_0, x_1, \dots, x_n, t) = (x_0, x_0 x_1, \dots, x_0 x_n, t)$  y la ecuación local de  $\tilde{B}$  en  $\tilde{P}$  es

$$\tilde{F}(x_0, \dots, x_n, t) = F_d(1, x_1, \dots, x_n, t) + x_0 \cdot \tilde{F}_{d+1}(1, x_1, \dots, x_n, t) + \dots$$

se puede ver  $p \circ \pi : (\tilde{B}, \tilde{P}) \rightarrow (\mathbb{D}, 0)$  como una deformación del germen de hipersuperficie con singularidad aislada  $(\tilde{V}, \tilde{P})$ , (estamos suponiendo que  $D_0$  es reducido). Cada hipersuperficie  $(p \circ \pi)^{-1}(t)$  coincide con la transformada estricta  $\tilde{V}_t$  de  $V_t$  mediante la transformación cuadrática de centro el origen.

**2.2.3. Teorema.** *En las condiciones del teorema anterior se tiene*

(a) *para cada punto singular  $P_i \in \text{Sing}(D_0)$ , existe una (única) sección  $\tau_i : \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{D}$  tal que cada  $\tau_i(t) \in \text{Sing}(D_t)$  y*

$$\mu(D_0, P_i) = \mu(D_t, \tau_i(t)),$$

(b) *para cada punto singular  $P_i \in \text{Sing}(D_0)$ , existe una (única) sección  $\eta_i : \mathcal{T} \rightarrow \tilde{B}$  tal que cada  $\eta_i(t) \in \text{Sing}(\tilde{V}_t)$  y*

$$\mu(\tilde{V}, \tilde{P}_i) = \mu(\tilde{V}_t, \eta_i(t)).$$

*Demostración:* Por la semicontinuidad del número de Milnor, ver (2.13), para cada  $P_i \in \text{Sing}(D_0)$ , existen  $x_{i_1}(t), \dots, x_{i_{k_i}}(t)$  puntos singulares de  $D_t$  tales que

$$(2.14) \quad \mu(D_0, P_i) \geq \sum_{j=1}^{k_i} \mu(D_t, x_{i_j}(t))$$

De igual modo, para cada  $P_i \in \text{Sing}(D_0)$ , existen  $y_{i_1}(t), \dots, y_{i_{s_i}}(t)$  puntos singulares de  $\tilde{V}_t$  tales que

$$(2.15) \quad \mu(\tilde{V}_0, \tilde{P}_i) \geq \sum_{l=1}^{s_i} \mu(\tilde{V}_t, y_{i_l}(t))$$

Como el número de Milnor de  $V_t$  es independiente de  $t$ , la fórmula del número de Milnor del Teorema de 2.1.19 nos da la identidad

$$(2.16) \quad \sum_{P \in \text{Sing}(D)} \mu(D, P) + \sum_{P \in \text{Sing}(D)} \mu(\tilde{V}, \tilde{P}) = \sum_{P_t \in \text{Sing}(D_t)} \mu(D_t, P_t) + \sum_{P_t \in \text{Sing}(D_t)} \mu(\tilde{V}_t, \tilde{P}_t).$$

Así, las desigualdades de (2.14) y (2.15) son igualdades. Aplicando el criterio de irreducibilidad del lugar singular de Lé, ver el Teorema de 2.2.1, obtenemos las secciones que buscamos.  $\square$

El siguiente ejemplo de Briançon y Speder, ver [B-S 1], demuestra que la condición de que el cono tangente sea reducido es necesaria. En efecto, la familia dada por los ceros del polinomio

$$z_0^5 + t z_0 z_1^6 + z_1^7 z_2 + z_2^{15} = 0,$$

tiene como lugar singular el conjunto  $(0, 0, 0, t)$ . Cada singularidad aislada de superficie  $(V_t, 0)$  es casihomogénea de pesos  $(z_0, z_1, z_2) = (\frac{3}{15}, \frac{2}{15}, \frac{1}{15})$ . Por tanto todas tienen el mismo número de Milnor 364 y la misma multiplicidad 5. Sin embargo, las secciones planas genéricas para  $t = 0$  y para  $t \neq 0$ , por planos  $z_2 = az_0 + bz_1$ , tienen distinto número de Milnor,  $\mu^{(2)}(V_0, 0) = 28$  y  $\mu^{(2)}(V_t, 0) = 26$ .

## 2.3 Fórmula de Yomdin

Usando los resultados de la primera sección de este capítulo se puede dar una demostración inmediata de la fórmula de Yomdin, ver [Yomdin], [Lě 2], [L-M] para otras demostraciones. Sea  $f : (\mathbb{C}^{n+1}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$  un germen de función analítica y sea el germen de hipersuperficie  $(V, 0) := f^{-1}(0)$ ; sea

$$f(z_0, \dots, z_n) = f_d(z_0, \dots, z_n) + f_{d+k}(z_0, \dots, z_n) + \dots$$

la descomposición de  $f$  como suma de sus componentes homogéneas y sea  $D$  su cono tangente en 0. Supongamos que  $Sing(D) \cap \mathcal{Z}(f_{d+k}) = \emptyset$  (\*).

**2.3.1. Teorema. Fórmula de Yomdin.** *Con la hipótesis de que  $Sing(D) \cap \mathcal{Z}(f_{d+k}) = \emptyset$ ,  $(V, 0)$  define una singularidad aislada de hipersuperficie en  $\mathbb{C}^{n+1}$  y su número de Milnor es igual a*

$$(2.17) \quad \mu(V, 0) = (d-1)^{n+1} + k \sum_{P \in Sing(D)} \mu(D, P),$$

donde  $\mu(D, P)$  denota el número de Milnor de la hipersuperficie  $D$  en el punto singular  $P$ .

*Demostración:* Sea  $\pi : (\tilde{\mathbb{C}}^{n+1}, E) \rightarrow (\mathbb{C}^{n+1}, 0)$  la transformación cuadrática de  $(\mathbb{C}^{n+1}, 0)$  con centro en 0. Sea  $E := \pi^{-1}(0) \simeq \mathbb{P}^n$  el divisor excepcional de  $\pi$  y sea  $\tilde{V}$  la transformada estricta de  $(V, 0)$ . Sabemos que  $Sing(\tilde{V}) \cap E \subset Sing(D)$ . Si  $Sing(D)$  es vacío, entonces  $(V, 0)$  tiene un punto singular aislado. En caso contrario, sea  $P \in Sing(D)$  un punto singular del cono tangente. Se eligen coordenadas proyectivas en  $\mathbb{P}^n$  de modo que  $P = (1 : 0 : \dots : 0)$ . La condición (\*) se traduce en la siguiente condición sobre la función  $f$ ,  $f$  viene dada en coordenadas locales por una expresión del siguiente tipo

$$f_d(z_0, \dots, z_n) + z_0^{d+k} + \tilde{f}_{d+k} + \dots$$

La aplicación  $\pi$  está definida en la carta adecuada como  $\pi(x_0, \dots, x_n) = (x_0, x_1 x_0, \dots, x_n x_0)$ ; en estas coordenadas afines  $\tilde{P}$  es el origen. La ecuación local de  $\tilde{V}$  en un entorno de  $\tilde{P}$  es

$$f_d(1, x_1, \dots, x_n) + x_0^k \cdot g(x_0, x_1, \dots, x_n) = 0$$

donde  $g(x_0, x_1, \dots, x_n) = 1 + \tilde{f}_{d+k}(1, x_1, \dots, x_n) + \dots$ , con  $\tilde{f}_{d+k}(1, 0, \dots, 0) = 0$ . Así,  $g$  es una unidad en el anillo de series  $\mathbb{C}\{x_0, \dots, x_n\}$ .

Sea el cambio analítico de coordenadas:

$$\begin{aligned} \bar{x}_i &= x_i & \text{para todo } i \in \{1, \dots, n\} \\ \bar{x}_0 &= x_0 w(x_0, x_1, \dots, x_n) \end{aligned}$$

donde  $w$  es una raíz  $k$ -ésima del germen  $g$ . Después del cambio analítico de coordenadas, la ecuación del germen de  $\tilde{V}$  en un entorno de  $\tilde{P}$  es

$$f_d(1, \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) + \bar{x}_0^k = 0.$$

Con esta ecuación local la singularidad de  $\tilde{V}$  en  $\tilde{P}$  es aislada y su número de Milnor es  $(k-1)\mu_P(D)$ . Para terminar la demostración del teorema basta aplicar el Teorema de 2.1.19.  $\square$

**2.3.2. Ejemplo. Curvas planas.** En el caso  $n = 1$ , es decir cuando  $f \in \mathbb{C}\{x, y\}$  y  $(V, 0)$  es un germen de curva, la condición (\*) de la fórmula de Yomdin se traduce en la siguiente propiedad. Sea  $f = f_d + f_{d+k} + \dots$ . Como  $f_d$  y  $f_{d+k}$  son polinomios homogéneos de dos variables admiten una factorización en producto de polinomios homogéneos de grado uno. Por tanto, se puede escribir ambos polinomios de la siguiente manera

$$\begin{aligned} f_d &= \prod_{i=1}^s (\alpha_i x + \beta_i y)^{m_i} \\ f_{d+k} &= \prod_{j=1}^l (a_j x + b_j y)^{n_j} \end{aligned}$$

Ahora  $D \subset \mathbb{P}^1$  está formado por una cantidad finita de puntos  $(\beta_i : -\alpha_i)$ . Mirando los correspondientes anillos locales en estos puntos, se tiene que el conjunto  $Sing(D)$  es el conjunto

$$\{(\beta_i : -\alpha_i) \quad \text{tales que} \quad m_i > 1\}.$$

De este modo la condición (\*) es equivalente a que las raíces múltiples de  $f_d = 0$  no sean raíces de  $f_{d+k} = 0$ .

Sea pues,  $P = (\beta_i : -\alpha_i)$  una raíz de  $f_d = 0$  de multiplicidad  $m_i$  mayor que uno. Se puede suponer que  $P$  tiene coordenadas homogéneas  $(0 : 1)$ . Para calcular el número de Milnor de  $D$  en  $P$  hay que calcular la dimensión del  $\mathbb{C}$ -espacio vectorial

$$\mu(D, P) = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathbb{C}\{x\}}{(x^{m_i-1})} = m_i - 1.$$

Por tanto, el número de Milnor del germen de curva  $(V, 0)$  es

$$\mu(V, 0) = (d-1)^2 + k \sum_{P \in \mathcal{Z}(f_d)} (m_P - 1),$$

donde  $m_P$  es la multiplicidad de  $P$  en  $\mathcal{Z}(f_d)$ . Otro modo de escribir esta última igualdad es

$$(2.18) \quad \mu(V, 0) = (d-1)^2 + k \cdot (d-p),$$

donde  $p$  es el grado del polinomio  $f_d$  reducido.

Finalmente, obsérvese que las singularidades simples de curvas  $A_k$ ,  $D_k$  y  $E_6$  y  $E_8$  verifican la condición (\*), no verificándola la singularidad  $E_7$ .

En relación con los invariantes polares  $(e_q, m_q)$  de las singularidades que verifiquen la condición (\*) anterior, Luengo y Melle han demostrado el siguiente resultado el cual nos dice que valores pueden tomar los cocientes  $\{\frac{e_q}{m_q}\}$ , ver [L-M].

**2.3.3. Proposición. [L-M].** *Supongamos que  $(V, 0)$  y  $f \in \mathbb{C}\{x_0, \dots, x_n\}$  verifican (\*) y que  $\text{Sing}(D)$  es no vacío.*

- (a) *El conjunto  $\{\frac{e_q}{m_q}\}_{\text{red}}$  es igual a  $\{d+k-1\}$  si y sólo si  $\text{Sing}(D) = \mathcal{Z}(f_{d_{z_1}}, \dots, f_{d_{z_n}})$ . En este caso  $(V, 0)$  es topológicamente equivalente a la singularidad definida por el polinomio  $z_1^d + z_2^d + \dots + z_n^d + z_0^{d+k}$ .*
- (b) *En cualquier otro caso, el conjunto  $\{\frac{e_q}{m_q}\}_{\text{red}}$  es igual  $\{d-1, d+k-1\}$  y si  $H$  es un hiperplano de  $\mathbb{C}^{n+1}$  tal que  $\text{Sing}(D) \cap H$  es vacío,  $H = \mathcal{Z}(l)$  donde  $l$  es una forma lineal, entonces la familia  $F(x, t) = f_d(x) + (1-t)f_{d+k}(x) + tl^{d+k}$  es  $\mu^*$ -constante en un conjunto abierto conexo de  $\mathbb{C}$  que contenga al 0 y al 1. Así,  $(V, 0)$  tiene el mismo tipo topológico que la singularidad definida por  $F(x, 1)$ .*

**2.3.4. Comentario.** Obsérvese que el resultado anterior nos dice que el tipo topológico de  $(V, 0)$  está determinado por el  $d+k$ -jet de  $f$ . Esto va llevar a la definición de singularidades bivalentes.

## 2.4 Singularidades bivalentes

Vamos a introducir ahora la noción de singularidad bivalente. Este tipo de singularidades jugarán un papel central de ahora en adelante.

**2.4.1. Definición.** Un germen de función analítica  $f \in \mathbb{C}\{z_0, \dots, z_n\}$  es *bivalente* si el desarrollo de  $f$  como suma de sus componentes homogéneas tiene sólo dos componentes no nulas, es decir  $f = f_d + f_{d+k}$ .

**2.4.2. Definición.** Un germen de hipersuperficie  $(V, 0) \subset (\mathbb{C}^{n+1}, 0)$  con singularidad aislada define una *singularidad bivalente* si existe un germen de función analítica  $f \in \mathbb{C}\{z_0, \dots, z_n\}$  bivalente tal que el germen de hipersuperficie  $(f^{-1}(0), 0)$  tiene una singularidad aislada y  $(V, 0)$  tiene el mismo tipo topológico que  $(f^{-1}(0), 0)$ .

En el comentario último de la sección anterior se ha visto que la Proposición de 2.3.3 asegura que todas las singularidades que verifiquen la condición (\*) de la fórmula de Yomdin son singularidades bivalentes.

**2.4.3. Notación.** Para las singularidades bivalentes se sigue denotando por  $D \subset \mathbb{P}^n$  al proyectivizado del cono tangente, es decir al conjunto de ceros de  $f_d$  y por  $T \subset \mathbb{P}^n$  al conjunto de ceros de  $f_{d+k}$ .

**2.4.4. Teorema.** *Sea  $f \in \mathbb{C}\{x, y, z\}$  un germen de función analítica bivalente. Su lugar de ceros  $(V, 0) \subset (\mathbb{C}^3, 0)$  es una singularidad de superficie aislada, es decir bivalente, si y sólo si el conjunto proyectivo  $\text{Sing}(D) \cap \text{Sing}(T)$  es vacío.*

*Demostración:* La condición es necesaria independientemente de que la dimensión sea dos. Sea  $f = f_d + f_{d+k}$ . Supongamos que existe un punto  $P$  en la intersección de los conjuntos  $Sing(D)$  y  $Sing(T)$ . se puede suponer que  $P$  tiene coordenadas proyectivas  $(1 : 0 : \dots : 0)$ . Entonces el germen de curva  $C$  definido por las ecuaciones  $z_1 = z_2 = \dots = z_n = 0$  es singular en  $(V, 0)$ . En efecto, el lugar singular viene determinado por  $f$  y por el ideal jacobiano de  $f$ ; en este caso por los ceros de

$$\begin{aligned} f_{d z_i} + f_{d+k z_i} &= 0 \\ f_d + f_{d+k} &= 0. \end{aligned}$$

Los puntos de la curva  $C$  son de la forma  $(z_0, 0, \dots, 0)$  y anulan a las ecuaciones anteriores, sin más que observar que, como  $P$  es singular para  $D$  y para  $T$ , entonces

$$f_{d z_i}(z_0, 0, \dots, 0) + f_{d+k z_i}(z_0, 0, \dots, 0) = z_0^{d-1} f_{d z_i}(P) + z_0^{d+k-1} f_{d+k z_i}(P) = 0,$$

para todas las derivada parciales.

La condición es suficiente en el caso de superficies. Para estudiar si  $(V, 0)$  tiene una singularidad aislada se considera de nuevo la transformación cuadrática de centro el origen. Sea  $\pi : (\tilde{\mathbb{C}}^3, E) \rightarrow (\mathbb{C}^3, 0)$  la transformación cuadrática de  $(\mathbb{C}^3, 0)$  con centro en 0. Sea  $E = \pi^{-1}(0) \simeq \mathbb{P}^2$  el divisor excepcional de  $\pi$  y sea  $\tilde{V}$  la transformada estricta de  $(V, 0)$ . Se sabe que  $Sing(\tilde{V}) \cap E \subset Sing(D)$ . Si  $Sing(D)$  es vacío, entonces  $(V, 0)$  tiene un punto singular aislado. En caso contrario, sea  $P \in Sing(D)$  un punto singular del cono tangente. Si  $P$  no es un punto de  $T$ , la demostración del Teorema de 2.3.1 nos vale para ver que  $(\tilde{V}, \tilde{P})$  es una singularidad aislada y por tanto en entornos de esos puntos del cono tangente las posibles singularidades de  $\tilde{V}$  están sobre el divisor excepcional.

Supongamos por tanto que  $P$  es un punto singular de  $D$  y un punto liso de  $T$ . Se eligen coordenadas proyectivas en  $\mathbb{P}^2$  de modo que  $P = (1 : 0 : 0)$ . La aplicación  $\pi$  está definida en la carta adecuada como  $\pi(x_0, x_1, x_2) = (x_0, x_1 x_0, x_2 x_0)$ ; en estas coordenadas afines  $\tilde{P}$  es el origen. La ecuación local de  $\tilde{V}$  en un entorno de  $\tilde{P}$  es

$$f_d(1, x_1, x_2) + x_0^k \cdot f_{d+k}(1, x_1, x_2) = 0.$$

Como la curva plana  $T$  es lisa en  $P$ , existe un cambio analítico de coordenadas  $(\bar{x}, \bar{y})$  a coordenadas  $(x_1, x_2)$ ,  $h_1 : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$ , de modo que  $f_{d+k}(1, h_1(\bar{x}, \bar{y})) = \bar{x}$ . Sea  $\rho(\bar{x}, \bar{y}) := f_d(1, h_1(\bar{x}, \bar{y}))$ . Sea  $s := (D, T)_P$ , es mayor que 1 ya que  $P$  es singular para  $D$ . Por tanto  $\rho(0, \bar{y}) = c \cdot \bar{y}^s + \dots$  términos de mayor grado,  $c \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ . Por el teorema de Preparación de Weierstrass

$$\rho(\bar{x}, \bar{y}) = v(\bar{x}, \bar{y}) \cdot (\bar{y}^s + \bar{x} b_1(\bar{x}) \bar{y}^{s-1} + \dots + \bar{x} b_{s-1}(\bar{x}) \bar{y} + \bar{x} b_s(\bar{x})),$$

donde  $v(0, 0) \neq 0$  y  $b_s(0) = 0$  ya que  $P \in Sing(D)$ .

Como  $v(\bar{x}, \bar{y})$  es una unidad en  $\mathbb{C}\{\bar{x}, \bar{y}\}$ , sea  $u(\bar{x}, \bar{y})$  una raíz  $s$ -ésima de  $v(\bar{x}, \bar{y})$ . Se puede realizar un nuevo cambio analítico de coordenadas  $h_2 : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$ ,  $h_2(\bar{x}_1, \bar{y}_1) = (\bar{x}, \bar{y})$  que es el inverso del siguiente cambio de coordenadas

$$\begin{aligned} \bar{x}_1 &= \bar{x} \\ \bar{y}_1 &= \bar{y} u(\bar{x}, \bar{y}) \end{aligned}$$

de modo que  $f_{d+k}(1, h_1 \circ h_2(\bar{x}_1, \bar{y}_1)) = \bar{x}_1$ , y

$$\tilde{\rho}(\bar{x}_1, \bar{y}_1) := \rho \circ h_2(\bar{x}_1, \bar{y}_1) = f_d(1, h_1 \circ h_2(\bar{x}_1, \bar{y}_1)) = \bar{y}_1^s + \bar{x}_1 g(\bar{x}_1, \bar{y}_1),$$

y  $g(0, 0) = 0$  ya que  $P \in \text{Sing}(D)$ .

Sea el cambio analítico de coordenadas  $h : (\mathbb{C}^3, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^3, 0)$ ,  $(\bar{w}, \bar{x}_1, \bar{y}_2) \rightarrow (x_0, x_1, x_2)$ , definido como

$$h(\bar{w}, \bar{x}_1, \bar{y}_2) = (\bar{w}, h_1 \circ h_2(\bar{x}_1, \bar{y}_1)).$$

Como sólo se han hecho cambios analíticos  $\tilde{P}$  sigue siendo el  $(0, 0, 0)$  y la ecuación del germen  $\tilde{V}$  en un entorno de este punto es

$$(2.19) \quad \bar{y}_1^s + \bar{x}_1 \cdot g(\bar{x}_1, \bar{y}_1) + \bar{w}^k \cdot \bar{x}_1 = 0.$$

Aunque se han realizado cambios analíticos de coordenadas el divisor excepcional está definido por la ecuación  $\bar{w} = 0$ . El lugar singular de  $\tilde{V}$  son los puntos de  $\tilde{V}$  que anulan las siguientes tres ecuaciones:

$$\begin{aligned} g(\bar{x}_1, \bar{y}_1) + \bar{x}_1 \cdot \frac{\partial g}{\partial \bar{x}_1}(\bar{x}_1, \bar{y}_1) + \bar{w}^k &= 0 \\ s\bar{y}_1^{s-1} + \bar{x}_1 \cdot \frac{\partial g}{\partial \bar{y}_1}(\bar{x}_1, \bar{y}_1) &= 0 \\ k\bar{w}^{k-1} \cdot \bar{x}_1 &= 0 \end{aligned}$$

Se buscan puntos que no tengan la coordenada  $\bar{w}$  igual a cero y que anulen la tercera ecuación, entonces la coordenada  $\bar{x}_1$  debe ser nula. Sustituyendo ahora en la ecuación segunda ó en la que define  $\tilde{V}$  se tiene también que la coordenada  $\bar{y}_1$  debe ser nula. Finalmente, como  $g(0, 0) = 0$ , la otra coordenada también debe de ser cero. De este modo las singularidades de  $\tilde{V}$  están contenidas en  $E$ . Nótese que las singularidades de  $\tilde{V}$  pueden no ser aisladas, esto ocurrirá cuando  $D$  sea una curva con componentes múltiples.  $\square$

**2.4.5. Ejemplo.** Para  $n > 2$  la condición del teorema no es suficiente. Sea por ejemplo el germen de función analítica bivalente

$$f(z_0, z_1, z_2, z_3) = z_1 z_3 + (z_2 - z_3)^2 - z_0^2 z_1.$$

El único punto singular de  $D$  es el punto de coordenadas  $(1 : 0 : 0 : 0)$  y los puntos singulares de  $T$  son los del hiperplano de ecuación  $z_0 = 0$ . Por tanto se verifica la condición del teorema. Sin embargo es fácil de ver que, por ejemplo, la curva  $\gamma(t) = (t, 0, t^2, t^2)$  es de puntos singulares para la hipersuperficie  $(f^{-1}(0), 0) \subset (\mathbb{C}^4, 0)$ .

**2.4.6. Teorema.** Sea  $f \in \mathbb{C}\{x, y, z\}$  un germen de función analítica bivalente tal que su lugar de ceros  $(V, 0) \subset (\mathbb{C}^3, 0)$  es una singularidad de superficie aislada. Si su cono tangente  $D$  es reducido entonces

$$\mu(V, 0) = (d-1)^{n+1} + k\mu(D) + k \cdot \sum_{P \in \text{Sing}(D)} ((D, T)_P - 1).$$

*Demostración:* Como  $D$  es reducido se puede aplicar el Teorema de 2.1.19. Sea  $\pi : (\tilde{\mathbb{C}}^3, E) \rightarrow (\mathbb{C}^3, 0)$  la transformación cuadrática de centro el origen. Sea  $E = \pi^{-1}(0) \simeq \mathbb{P}^2$  el divisor excepcional de  $\pi$  y sea  $\tilde{V}$  la transformada estricta de  $(V, 0)$ . De este modo es suficiente probar que para cada  $P \in \text{Sing}(D)$  se tiene que

$$\mu(\tilde{V}, \tilde{P}) = (k-1)\mu(D, P) + k(s-1),$$

donde  $s$  es la multiplicidad de intersección de  $D$  y  $T$  en  $P$ . Si  $P$  no es un punto de  $T$ , basta observar que, mediante un cambio analítico de coordenadas, una ecuación local de  $\tilde{V}$  en  $\tilde{P}$  es

$$f_d(x, y, 1) + z^k = 0,$$

donde  $f_d(x, y, 1) = 0$  es una ecuación local de  $D$  en  $P$ . Calculemos este número de Milnor.

Sea pues,  $P$  un punto de  $T$ . En este caso la ecuación que define el germen de  $\tilde{V}$  en  $\tilde{P}$  viene determinada como en (2.19),

$$y^s + x \cdot g(x, y) + w^k \cdot x = 0.$$

donde  $\tilde{\rho}(x, y) := y^s + xg(x, y) = 0$  es una ecuación del germen de curva  $D$  en  $P$  y  $x = 0$  es una ecuación local de la curva  $T$  en  $P$ . La función analítica  $\tilde{\rho}(x, y)$  es reducida ya que, por hipótesis,  $D$  es reducido. se puede calcular el número de Milnor de la siguiente manera:

1. Si  $k = 1$ , entonces

$$\begin{aligned} \mu(\tilde{V}, \tilde{P}) &= \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathbb{C}\{x, y, w\}}{(\frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial x} + w, \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial y}, x)} \\ &= \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathbb{C}\{y, w\}}{(w, y^{s-1})} = s-1 \end{aligned}$$

2. Si  $k > 1$ , se tiene

$$\begin{aligned} \mu(\tilde{V}, \tilde{P}) &= \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathbb{C}\{x, y, w\}}{(\frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial x} + w^k, \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial y}, w^{k-1}x)} \\ &= \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathbb{C}\{y, w\}}{(w^k, y^{s-1})} + (k-1) \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathbb{C}\{x, w\}}{(\frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial x}, \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial y})} \\ &= k(s-1) + (k-1)\mu(D, P) \end{aligned}$$

□

**2.4.7. Observación.** La fórmula para el número de Milnor obtenida en el teorema anterior generaliza la obtenida para singularidades que verifiquen la condición (\*) de la fórmula de Yomdin.

En el siguiente teorema se da, para las singularidades bivalentes, una acotación más sencilla para el supremo de los cocientes  $\frac{e_q}{m_q}$ .

**2.4.8. Teorema.** Sea  $f \in \mathbb{C}\{x, y, z\}$  un germen de función analítica bivalente tal que su lugar de ceros  $(V, 0) \subset (\mathbb{C}^3, 0)$  es una singularidad de superficie aislada. Si su cono tangente  $D$  es reducido entonces

$$\sup\left\{\frac{e_q}{m_q} : \gamma_q \text{ componente de } \Gamma_H\right\} \leq d + k - 1 + k \cdot \sup\{(D, T)_P - 1 : P \in \text{Sing}(D) \cap T\}.$$

**2.4.9. Observación.** El supremo del lado derecho de la desigualdad sólo tiene sentido en cuando exista algún punto singular de  $D$  que sea también punto de  $T$ . Si alguno de estos puntos existe, la desigualdad se puede escribir del siguiente modo:

$$\sup\left\{\frac{e_q}{m_q} : \gamma_q \text{ componente de } \Gamma_H\right\} \leq d - 1 + k \cdot \sup\{(D, T)_P : P \in \text{Sing}(D) \cap T\}.$$

*Demostración:* Si  $\text{Sing}(D)$  es vacío se sabe por el Scholium del Teorema de 2.1.16 que todos los cocientes  $\frac{e_q}{m_q}$  son iguales a  $d - 1$ . Si  $\text{Sing}(D)$  no es vacío pero  $\text{Sing}(D) \cap T$  es vacío, por la Proposición de 2.3.3 el supremo de los cocientes  $\frac{e_q}{m_q}$  es  $d + k - 1$ . Supongamos pues, que  $\text{Sing}(D) \cap T$  no es vacío.

Sea  $W$  el abierto de hiperplanos adecuados para  $(V, 0)$ . Sea  $H \in W$ , y sea  $\Gamma_H$  la curva polar asociada a  $f$  y a  $H$ .

Realizamos un cambio de coordenadas proyectivas de modo que  $H = \{z = 0\}$ . En estas condiciones la curva polar  $\Gamma_H$  viene definida como el germen de curva en el origen que definen  $f_x = 0, f_y = 0$ . Además,  $\text{Sing}(D) \subset \mathbb{P}^2 \setminus \mathcal{Z}(z)$  y por tanto se puede aplicar la Proposición de 2.1.14. Se tiene una descomposición de la curva polar de la forma  $\Gamma_H = \cup \Gamma_P, P \in \mathcal{Z}(f_{d_x}, f_{d_y})$ , donde ya se sabe que cada

$$\Gamma_P = \bigcup_{q=1}^s \gamma_q^P,$$

y  $\gamma_q^P$  es un germen de curva irreducible con dirección tangente definida por  $P$ .

Sea  $P \in \mathcal{Z}(f_{d_x}, f_{d_y})$ , por la condición de transversalidad de la curva polar, se sabe que ninguna recta tangente a las componentes irreducibles de  $\Gamma_H$  está contenida en  $H$ , por lo que  $P$  tiene la coordenada  $z$  no nula. Así, se puede hacer otro cambio proyectivo de coordenadas de modo que quede fijo  $H$  y que  $P$  tenga coordenadas proyectivas  $(0 : 0 : 1)$ .

Sea  $\gamma_q^P$  una componente irreducible de  $\Gamma_P$ . Como la dirección de la recta tangente a  $\gamma_q^P$  en el origen es  $(0 : 0 : 1)$  y la multiplicidad de  $\gamma_q^P$  en el origen es igual a  $m_q$ , entonces una parametrización de la curva  $\gamma_q^P$  vendrá dada por un germen de función  $h_q : (\mathbb{C}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^3, 0)$  definido como sigue

$$h_q(t) = (h_q^1(t), h_q^2(t), t^{m_q})$$

donde  $\text{ord}_t h_q^i(t) > m_q$  para todo  $i \in \{1, 2\}$ .

(a) Se ha visto en el Teorema de 2.1.16 que si  $P \notin \text{Sing}(D)$ , se tiene que

$$\frac{e_q}{m_q} = d - 1.$$



(b) Sea  $P \in \text{Sing}(D)$ . Luengo y Melle han demostrado que si  $P$  no es un punto de  $T$  entonces  $\frac{c_q}{m_q} = d + k - 1$ , ver [L-M]. Sea por tanto  $P \in \text{Sing}(D) \cap T$ , y sea  $\gamma_q^P$  una componente irreducible de  $\Gamma_P$ . Sea  $\pi : (\widetilde{\mathbb{C}^3}, E) \rightarrow (\mathbb{C}^3, 0)$  la transformación cuadrática de centro el origen. Como  $P$  tiene coordenadas  $(0 : 0 : 1)$  la transformada estricta  $\widetilde{\gamma}_q^P$  de la curva  $\gamma_q^P$  está en la carta donde  $\pi$  viene dada en coordenadas locales como

$$\pi(x_1, y_1, z_1) = (x_1 z_1, y_1 z_1, z_1).$$

Por lo tanto una parametrización de  $\widetilde{\gamma}_q^P$  está dada en este caso por

$$\begin{array}{ccc} \tilde{h}_q : (\mathbb{C}, 0) & \longrightarrow & (\widetilde{\mathbb{C}^3}, E) \\ t & \longrightarrow & \left( \frac{h_1(t)}{t^{m_q}}, \frac{h_2(t)}{t^{m_q}}, t^{m_q} \right) \end{array}$$

Como  $f$  es un germen bivalente, se tiene que  $\tilde{f}$  es  $f_d(x_1, y_1, 1) + z_1^k \cdot f_{d+k}(x_1, y_1, 1)$ . La derivada de  $\tilde{f}$  respecto de  $z_1$  es

$$(\tilde{f})_{z_1} = k \cdot z_1^{k-1} \cdot f_{d+k}(x_1, y_1, 1).$$

Se ha visto en el Teorema de 2.1.16 que se da la igualdad

$$c_q = d \cdot m_q + \text{ord}_t((\tilde{f})_{z_1} \circ \tilde{h}_q(t)).$$

Sustituyendo  $(\tilde{f})_{z_1}$  en la anterior igualdad se obtiene

$$(2.20) \quad c_q = (d + k - 1) \cdot m_q + \text{ord}_t(f_{d+k}(x_1, y_1, 1) \circ \tilde{h}_q(t)).$$

Relacionemos esta última igualdad con el número de Milnor de  $\tilde{V}$  en  $\tilde{P}$ . Por el Lema de 2.1.2,  $\tilde{V}$  tiene en  $\tilde{P}$  una singularidad aislada y se puede calcular su número de Milnor. Para ello hace falta una ecuación local de  $\tilde{V}$  en  $\tilde{P}$ . La ecuación es  $\tilde{f} = 0$ ;  $\tilde{P}$  en estas coordenadas es el origen y así,

$$\mu(\tilde{V}, \tilde{P}) = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathbb{C}\{x_1, y_1, z_1\}}{(\tilde{f}_{x_1}, \tilde{f}_{y_1}, \tilde{f}_{z_1})}.$$

Como  $\tilde{\Gamma}_H$  viene definida como el lugar de ceros de  $(\tilde{f})_{x_1}, (\tilde{f})_{y_1}$ , se tiene que

$$\begin{aligned} \mu(\tilde{V}, \tilde{P}) &= (\tilde{f}_{z_1}, \tilde{\Gamma}_H)_0 = \sum_{\gamma_q^P} \text{ord}_t((\tilde{f})_{z_1} \circ \tilde{h}_q(t)) \\ &= \sum_{\gamma_q^P} \left( (k-1)m_q + \text{ord}_t(f_{d+k}(x_1, y_1, 1) \circ \tilde{h}_q(t)) \right) \\ (2.21) \quad &= (k-1)\mu(D, P) + \sum_{\gamma_q^P} \text{ord}_t(f_{d+k}(x_1, y_1, 1) \circ \tilde{h}_q(t)) \end{aligned}$$

En el teorema anterior se ha calculado el número de Milnor de  $\tilde{V}$  en  $\tilde{P}$ ,

$$(2.22) \quad \mu(\tilde{V}, \tilde{P}) = (k-1)\mu(D, P) + k((D, T)_P - 1).$$

Usando las dos igualdades anteriores, (2.21) y (2.22), se tiene que

$$\sum_{\gamma_q^P} \text{ord}_t(f_{d+k}(x_1, y_1, 1) \circ \tilde{h}_q(t)) = k(I_P(D, T) - 1).$$

Esta igualdad asegura que se puede acotar  $\frac{\text{ord}_t(f_{d+k}(x_1, y_1, 1) \circ \tilde{h}_q(t))}{m_q}$  por  $k((D, T)_P - 1)$  y obtener el resultado pedido

$$\frac{e_q}{m_q} \leq d - 1 + k \sup\{(D, T)_P : P \in \text{Sing}(D) \cap T\}.$$

□

**2.4.10. Ejemplo.** Si todos los puntos singulares  $P$  de  $D$  son no-degenerados, es decir con número de Milnor igual a 1, entonces su componente  $\Gamma_P$  de la curva polar tiene multiplicidad 1. Esto asegura que su componente  $\Gamma_P$  consta de una única componente irreducible  $\gamma_q$  que además es lisa. De este modo,  $m_q$  es igual a 1 y la cota anterior se convierte en la igualdad

$$\sup\left\{\frac{e_q}{m_q}\right\} = d - 1 + k \sup\{(D, T)_P : P \in \text{Sing}(D) \cap T\}.$$



# Capítulo 3

## Superficies bivalentes

En este último capítulo se hace un estudio de las singularidades de superficies bivalentes. Estamos interesados en el cálculo del primer invariante topológico de la singularidad, el número de Milnor. En el capítulo anterior ya se estudió el caso en que el proyectivizado del cono tangente  $D$  era una curva plana reducida.

El hecho de permitir que  $D$  tenga componentes múltiples hace necesario un enfoque distinto del problema. Primero se hace un estudio de las singularidades de superficies de  $(\mathbb{C}^3, 0)$  que verifican condiciones más débiles que la condición  $(*)$  de la fórmula de Yomdin. En realidad se pide que la curva reducida  $D_{red}$  verifique la condición  $(*)$  y una cierta condición de transversalidad. Para este tipo de singularidades se calcula la sucesión  $\mu^*$  de números de Milnor y se demuestra que son singularidades bivalentes. El principal ingrediente para el cálculo del número de Milnor es el número de Milnor generalizado definido por Parusiński. En la primera sección se introduce la noción de número de Milnor generalizado y se dan las propiedades más interesantes de este número.

Finalmente, en la última sección, se estudia el número de Milnor de las singularidades bivalentes de superficies de  $(\mathbb{C}^3, 0)$ . Para ello se da una fórmula de comparación entre los números de Milnor de dos singularidades bivalentes. Con esta fórmula de comparación y con el número de Milnor obtenido en la segunda sección de las singularidades especiales se puede concluir en el Teorema de 3.3.10 con una fórmula para el número de Milnor de las singularidades de superficies bivalentes.

### 3.1 Número de Milnor generalizado

Las referencias básicas para esta sección son los artículos de Parusiński y Pragacz, ver [Parusiński] y [P-P], y el libro de geometría diferencial compleja de Wells, [Wells]. Recordemos su definición de número de Milnor generalizado y las propiedades del número de Milnor generalizado que se usarán en la siguiente sección.

Sea  $M$  una variedad diferenciable compleja conexa de dimensión  $n + 1$  y sea  $L$  un fibrado lineal holomorfo sobre  $M$ . Sea  $s$  una sección holomorfa global de  $L$ ,  $s \in H^0(M, L)$ , y sea  $Z$  el conjunto de ceros de  $s$ , esto es, una hipersuperficie de  $M$ . Fijemos una métrica hermitica sobre  $L$ . Sea  $T^*M$  el fibrado cotangente complejo,  $T^*M := T_{\mathbb{R}}^* \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ . Este fibrado es suma directa de la parte holomorfa  $T'^*M$  y de la parte antiholomorfa  $T''^*M$ .

Se considera la descomposición de conexión asociada a la métrica  $D = D' + D''$  :

$$D' : \mathcal{A}^0(L) \rightarrow \mathcal{A}^{1,0}(L) = \mathcal{A}^0(T^{*'}M \otimes L)$$

$$D'' = \bar{\partial} : \mathcal{A}^0(L) \rightarrow \mathcal{A}^{0,1}(L)$$

El conjunto de puntos singulares de  $Z$  es  $Sing(Z) = \{z \in Z : D's = 0\}$ .

Sea  $E$  un fibrado vectorial real orientado de dimensión  $k$  sobre una variedad diferenciable real de dimensión  $k$ , compacta, orientada y con borde  $(B, \partial B)$ . Para cada sección  $s$  de  $E$ , que no se anule sobre  $\partial B$ , se denota por  $ind_B s$  el índice de intersección sobre  $B$  de  $s$  y de la sección cero de  $E$ . Si  $\tilde{s}$  es una pequeña perturbación de  $s$  transversal a la sección cero, entonces  $ind_B s$  es igual al número de ceros de  $\tilde{s}$  contados con los signos. Si  $E$  es el fibrado trivial esta definición coincide con el grado topológico.

Con estas definiciones Parusiński, [Parusiński], define el número de Milnor generalizado. Sea  $Y$  una componente conexa y compacta de  $Sing(Z)$  y sea  $U$  un pequeño entorno de  $Y$ .

**3.1.1. Definición. [Parusiński].** Se llamará *número de Milnor generalizado de  $Z$  en  $Y$*  al índice de intersección  $ind_U D's$ , y se denotará por  $\mu(Z, Y)$ .

**3.1.2. Definición. [Parusiński].** Si además  $Z$  es compacta, se llamará *número de Milnor generalizado de  $Z$*  al índice de intersección de la sección cero del fibrado vectorial  $T^{*'}M \otimes L$  y de la sección cero del fibrado vectorial  $D's$ , y se denotará por  $\mu(Z)$ .

### Propiedades del número de Milnor generalizado .

1. Cuando  $Z$  es compacto y  $Y_1, \dots, Y_r$  son todas las componentes conexas de  $Sing(Z)$  se tiene que

$$\mu(Z) = \sum_{i=1}^r \mu(Z, Y_i).$$

2. [Parusiński] Proposition 1.4. Si  $Z$  tiene sólo singularidades aisladas, entonces

$$\mu(Z) = \sum_{x \in Sing(Z)} \mu(Z, x),$$

donde  $\mu(Z, x)$  es el número de Milnor usual de  $Z$  en  $x$ , [Milnor].

3. Esta propiedad se puede tomar como definición en el caso en que  $M$  sea compacta. La propiedad generaliza la fórmula para la característica de Euler-Poincaré de una subvariedad diferenciable de  $M$ .

[Parusiński] Proposition 1.6.

$$\mu(Z) = (-1)^{n+1} \chi(Z) + \langle c_{n+1}(T^{*'}M \otimes L), [M] \rangle - (-1)^{n+1} \chi(M),$$

donde  $[M]$  es la clase definida por  $M$ ,  $c_{n+1}$  es la clase de Chern máxima del fibrado y  $\chi(\cdot)$  es la característica de Euler-Poincaré.

4. [Parusiński] Corollary 1.7. Si  $Z'$  es otra sección holomorfa global de  $L$  entonces usando la propiedad anterior se tiene

$$\mu(Z) - \mu(Z') = (-1)^{n+1}(\chi(Z) - \chi(Z')).$$

En particular, si  $Z'$  es una sección lisa de  $L$  el número de Milnor generalizado  $\mu(Z)$  mide "cuanto dista topológicamente"  $Z$  de ser una hipersuperficie lisa.

#### 5. [Parusiński] Número de Milnor generalizado y transformaciones cuadráticas.

Debido a la anterior caracterización del número de Milnor generalizado en función de las clases de Chern se puede dar una relación entre los números de Milnor generalizados de  $Z$  y de su transformada estricta mediante una transformación cuadrática. Sea  $x$  una singularidad aislada de  $Z$ . Sea  $d$  la multiplicidad en  $x$  de  $Z$ . Sea  $\pi : \tilde{M} \rightarrow M$  la transformación cuadrática de  $M$  con centro  $x$ . Sea  $\tilde{V}$  la transformada estricta de  $Z$ . Denotemos a  $\pi^{-1}(x) \cap \tilde{V}$  por  $D$  y a  $\sum_{i=1}^r \mu(Y'_i)$  por  $\mu(\tilde{V}, D)$ , donde  $Y'_1, \dots, Y'_r$  son todas las componentes conexas de  $Sing(\tilde{V})$  contenidas en  $D$ . Entonces:

$$\mu(\tilde{V}, D) = \mu_x + (-1)^{n+1}(\chi(\tilde{V}) - \chi(Z)) - (d-1)^{n+1} + (-1)^{n+1} - (-1)^{n+1}h(n, d),$$

donde  $h(n, d) = (n+1) + \frac{(1-d)^{n+1}-1}{d}$  es la característica de Euler-Poincaré de una hipersuperficie lisa de grado  $d$  en  $\mathbb{P}^n$ .

6. La siguiente propiedad también es una caracterización del número de Milnor generalizado cuando  $M$  es compacta. [P-P] El número de Milnor generalizado de  $Z$  en  $M$  es también igual a

$$\mu(Z) := (-1)^{n+1}(\chi(Z) - \int_M c(L)^{-1}c_1(L)c(M)),$$

donde  $c(L)$  y  $c_1(L)$  denotan la clase de Chern total y la primera clase de Chern del fibrado lineal  $L$  y  $\chi$  es la característica de Euler-Poincaré. Esta igualdad es el lazo de unión entre los resultados [Parusiński] y de [P-P]. Para mostrar que la fórmula anterior y la de la propiedad 3 son iguales basta desarrollar las clases de Chern de ambas igualdades.

7. [P-P] Sea  $x$  un punto singular arbitrario de  $Z$  y supongamos que la hipersuperficie  $Z$  viene dada en coordenadas locales centradas en  $x$  como el conjunto de ceros de una función analítica  $f : (\mathbb{C}^{n+1}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ . Se eligen  $\epsilon > 0$  y  $\delta$  tales que  $0 < \delta \ll \epsilon$  y que se verifique el Teorema de Fibración. Sea  $F_x$  la fibra de Milnor asociada a  $f$  en  $x$ .

**3.1.3. Definición.** Se define el *número de Milnor topológico* como

$$\bar{\mu}(Z, x) := (-1)^n(\chi(F_x) - 1).$$

Cuando  $x$  es un punto liso  $Z$ , entonces  $\bar{\mu}(Z, x) = 0$ , si  $x$  es un punto singular aislado de  $Z$  entonces  $\bar{\mu}(Z, x) = \mu(Z, x)$  es el número de Milnor usual de  $Z$  en  $x$ .

Como  $Z$  es un conjunto analítico reducido admite una estratificación de Whitney, ver [Whitney]. Sea pues  $\mathcal{S}$  una estratificación de Whitney de  $Z$ . Entonces, por el Segundo Lema de Isotopía de Thom, ver e.g. [G] Theorem 5.8, el tipo topológico de las fibras de Milnor  $F_x$  asociada a  $x$  es constante a lo largo de los estratos de  $\mathcal{S}$ . De este modo, para cada estrato  $S \in \mathcal{S}$ , se denotará por  $\bar{\mu}_S$  el valor de la función  $x \rightarrow \bar{\mu}(Z, x)$  sobre  $S$ .

8. [P-P] Example 5. En caso de que  $M$  sea una subvariedad de  $\mathbb{P}^N$  y si, además, se supone que  $Y \subset \text{Sing}(Z)$  es liso y el par  $(Z \setminus Y, Y)$  satisface las condiciones de Whitney, entonces, para  $x \in Y$ ,

$$\bar{\mu}_Y = \bar{\mu}(Z, x) = (-1)^m \mu^{(n+1-m)}(Z, x),$$

donde  $m = \dim Y$  y  $\mu^{(n+1-m)}(Z, x)$  es el número de Milnor de la sección de  $Z$  en  $x$  por un plano genérico de dimensión  $(n+1-m)$ , ver [Teissier 1].

9. La siguiente proposición es la que va a permitir el cálculo del número de Milnor generalizado.

Proposition 7 [P-P]. Sea  $L$  un fibrado lineal holomorfo sobre una variedad  $M$  compleja compacta de dimensión  $(n+1)$ . Sea la hipersuperficie  $Z$  en  $M$  el conjunto de ceros de  $s \in H^0(M, L)$  y sea  $s'$  otra sección holomorfa global de  $L$  tal que el conjunto de ceros  $Z'$  de  $s'$  es lisa y transversal a una estratificación de Whitney  $S$  de  $Z$ . Entonces

$$\mu(Z) = \sum_{S \in S} \bar{\mu}_S \cdot \chi(S \setminus Z').$$

La idea es aplicar la noción de número de Milnor generalizado a los gérmenes de hipersuperficies con singularidades aisladas. Sin embargo las propiedades anteriores sólo valen para variedades compactas  $M$ . El siguiente lema arregla en cierta manera esta situación.

**3.1.4. Lema.** Sea  $(Z, 0) \subset (\mathbb{C}^{n+1}, 0)$  un germen de hipersuperficie con un punto singular aislado. Existe una hipersuperficie proyectiva  $Z$  de  $\mathbb{P}^{n+1}$  con un único punto singular aislado  $Q$ , tal que la singularidad de  $Z$  en  $Q$  es analíticamente equivalente a la singularidad del germen  $(Z, 0)$ .

*Demostración:* Sea  $\mathfrak{m} = (z_0, \dots, z_n)$  el ideal maximal del anillo local  $\mathbb{C}\{z_0, \dots, z_n\}$ . Supongamos que el germen  $(Z, 0)$  es el conjunto de ceros de una función analítica  $f$ . Utilizando el Teorema de  $K$ -determinación de Mather, ver [Mather] Theorem 3.5 y Theorem 9.2, como  $(Z, 0)$  tiene un punto singular aislado, existe un entero  $l$  de modo que para todo  $s > l$  y para todo  $g \in \mathbb{C}\{z_0, \dots, z_n\}$  con  $f - g \in \mathfrak{m}^s$ , existe un cambio analítico de coordenadas  $\Phi : (\mathbb{C}^{n+1}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^{n+1}, 0)$  con  $g = f \circ \Phi$ . Así, desde el punto de vista del estudio analítico, y por tanto topológico de  $(Z, 0)$ , podemos suponer que  $f$  es un polinomio de grado  $s$  suficientemente grande, sin más que tomar como  $g$  el polinomio de Taylor de  $f$  de orden  $s$ . Sea  $F$ , el homogeneizado de  $f$ , es decir

$$F(z_0, \dots, z_n, w) = w^s f\left(\frac{z_0}{w}, \dots, \frac{z_n}{w}\right).$$

Sea  $Q := (0 : \dots : 0 : 1)$ . Sea  $\mathcal{P}$  el espacio proyectivo formado por todos los polinomios homogéneos de grado  $s$ . Se considera el subconjunto  $A \subset \mathcal{P}$  formado todos los polinomios  $P(z_0, \dots, z_n, w)$  homogéneos de grado  $s$  tales que el polinomio de Taylor de  $P$  de orden  $l$  en el punto  $Q$  coincide con el polinomio de Taylor de  $F$  de orden  $l$  en el punto  $Q$ . El conjunto  $A$  es un subespacio proyectivo lineal de  $\mathcal{P}$  y por tanto define un sistema lineal

$V$  de  $L := \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n+1}}(s)$ , el fibrado lineal asociado a las hipersuperficies de grado  $s$  en  $\mathbb{P}^{n+1}$ . El punto  $Q$  es punto base de este sistema lineal ya que es un cero de todos los polinomios de  $A$ . Sea  $Q_1 \neq Q$ , veamos que existe un polinomio  $P$  de  $A$  que no se anula en  $Q_1$ . Se considera  $F_{\leq l}$  el homogeneizado de grado  $s$  del polinomio de Taylor de  $f$  hasta orden  $l$  en el punto  $Q$ . Se puede considerar el polinomio  $P = F_{\leq l} + h(z_0, \dots, z_n)$ , donde  $h$  es un polinomio homogéneo de grado  $s$  tal que  $h(Q_1) \neq F_{\leq l}(Q_1)$ .

Usando el teorema de Bertini, [G-H] pág. 137, el elemento genérico  $Z$  de este sistema lineal es liso fuera del punto base  $Q$ . De este modo, esta hipersuperficie genérica  $Z$  cumple las hipótesis del lema.  $\square$

El siguiente teorema de Lojasiewicz, [L], nos va a permitir demostrar el próximo lema.

**3.1.5. Teorema.** [L]. *Sea  $X$  un espacio analítico complejo y sea  $A$  un subconjunto analítico de  $X$ . Existe una triangulación de  $|X|$  en la cual aparece  $A$  como el soporte de un subcomplejo. En particular, existe un entorno abierto  $U$  de  $A$  tal que  $U$  y  $\tilde{U}$  se pueden retraer sobre  $A$ .*

Sea  $Z \subset \mathbb{P}^{n+1}$  una hipersuperficie de las obtenidas en el Lema de 3.1.4. Sea  $\pi : \widetilde{\mathbb{P}^{n+1}} \rightarrow \mathbb{P}^{n+1}$  la explosión de  $\mathbb{P}^{n+1}$  con centro el punto  $Q$ ; sea  $\tilde{Z}$  la transformada estricta de  $Z$  y sea  $E := \pi^{-1}(Q) \cong \mathbb{P}^n$  el divisor excepcional. Obsérvese que  $D \cong \tilde{V} \cap E$ . Por otro lado como  $Z$  tiene sólo como punto singular aislado a  $Q$ , las singularidades de  $\tilde{Z}$  están en  $\tilde{Z} \cap E$ .

**3.1.6. Lema.** *En las anteriores condiciones se verifica la siguiente igualdad:*

$$(3.1) \quad \chi(\tilde{Z}) - \chi(Z) = \chi(D) - 1 = \chi(D_{red}) - 1$$

*Demostración:* Sea  $\pi|_{\pi^{-1}(Z)} : \pi^{-1}(Z) \rightarrow Z$  el morfismo  $\pi$  restringido a la imagen inversa de  $Z$ . Usando el teorema anterior se puede elegir una triangulación de  $Z$  de modo que  $Q$  sea un subcomplejo de la triangulación. De igual manera se puede triangular  $\tilde{Z}$  de modo que  $\tilde{Z} \cap E$  sea un subcomplejo de la triangulación. Sean  $S_0 := \{Z \setminus Q\}$  y  $S_1 := \{Q\}$ . El morfismo  $\pi|_{\pi^{-1}(S_0)} : \pi^{-1}(S_0) \rightarrow S_0$  es biholomorfo con lo que es una fibración topológica y  $\pi|_{\pi^{-1}(Q)} : E \rightarrow S_1$  también es topológicamente trivial ya que es una aplicación sobre un punto. Por tanto se tiene que

$$\chi(\pi^{-1}(Z)) = \chi(E) \cdot \chi(Q) + \chi(Z - Q) = \chi(E) + \chi(Z) - 1.$$

Además,

$$\chi(\pi^{-1}(Z)) = \chi(\tilde{Z}) + \chi(E) - \chi(\tilde{Z} \cap E).$$

Como  $\tilde{Z} \cap E$  es el cono tangente  $D$ , entonces

$$\chi(\tilde{Z}) - \chi(Z) = \chi(D) - 1 = \chi(D_{red}) - 1.$$

$\square$

Aplicando el lema anterior a la propiedad 4 del número de Milnor generalizado se tiene

$$(3.2) \quad \mu(\tilde{Z}) = \mu(Z, 0) + (-1)^{n+1}(\chi(D) - 1) - (d-1)^{n+1} + (-1)^{n+1} - (-1)^{n+1}h(n, d),$$



donde  $h(n, d) = n + 1 + \frac{(1-d)^{n+1}-1}{d}$  es la característica de Euler-Poincaré de una hipersuperficie lisa de grado  $d$  en  $\mathbb{P}^n$ .

**Primera fórmula.** Simplificando (3.2) se obtiene la **primera fórmula** que relaciona el número de Milnor del germen  $(Z, 0)$  con el número de Milnor generalizado de la transformada estricta de  $Z$ :

$$(3.3) \quad \mu(Z, 0) = (d-1)^{n+1} + (-1)^n(\chi(D) - h(n, d)) + \mu(\tilde{Z}),$$

**3.1.7. Observación.** En el caso que el cono tangente  $D$  tenga sólo singularidades aisladas, se recupera la fórmula del Teorema de 2.1.19 del capítulo anterior:

$$(3.4) \quad \mu(Z, 0) = (d-1)^{n+1} + \mu(D) + \mu(\tilde{Z}).$$

## 3.2 Singularidades transversas

Sea  $f : (\mathbb{C}^3, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$  un germen de función analítica y sea  $(V, 0)$  el germen de superficie  $(V, 0) := (f^{-1}(0), 0)$ . Sea  $f = f_d + f_{d+k} + \dots$  el desarrollo de  $f$  como suma de componentes homogéneas. Sea la factorización en componentes irreducibles de  $f_d$  en  $\mathbb{C}[x, y, z]$ ,  $f_d = h_1^{q_1} \dots h_r^{q_r}$ . Para cada polinomio homogéneo  $h$  de  $\mathbb{C}[x, y, z]$ , se seguirá denotando por  $\mathcal{Z}(h) \subset \mathbb{P}^2$  la curva plana proyectiva, reducida o no, definida por  $h$ . Se consideran las siguientes curvas proyectivas planas:

$$C_i := \mathcal{Z}(h_i), \quad T := \mathcal{Z}(f_{d+k}),$$

$$D := \mathcal{Z}(f_d) = q_1 C_1 + \dots + q_r C_r, \quad \text{el proyectivizado del cono tangente de } V \text{ en } 0,$$

$$D_{red} = C_1 + \dots + C_r, \quad \text{la curva } D \text{ reducida,}$$

donde  $i \in \{1, \dots, r\}$ . Sea  $d_i$  el grado de la curva  $C_i$  y  $p := d_1 + \dots + d_r$  el grado de la curva  $D_{red}$ .

**3.2.1. Definición.** La singularidad de superficie anterior  $(V, 0)$  se llama *transversa* si verifica las siguientes dos condiciones:

- (i) La intersección de  $\text{Sing}(D_{red})$  y  $T$  es vacía.
- (ii) Para toda componente irreducible  $C_i$  de  $D$  tal que  $q_i > 1$ , las curvas  $C_i$  y  $T$  se intersecan en, exactamente,  $d_i \cdot (d+k)$  puntos distintos, i.e. ambas curvas son transversas.

El propósito de esta sección es demostrar que todos los gérmenes de superficies  $(V, 0)$  transversas son superficies bivalentes, de hecho topológicamente equivalentes al germen de superficie definido por los ceros de la función analítica  $f = f_d + f_{d+k}$ .

En el Teorema de 3.2.2 se demostrará que una singularidad transversa es aislada. Seguidamente los Teoremas de 3.2.3 y de 3.2.9 dan los números de Milnor del germen  $(V, 0)$  y de su sección plana genérica. Por último, en el Corolario de 3.2.10 se muestra que  $(V, 0)$  es bivalente y que su tipo topológico está determinado por el  $(d+k)$ -jet de  $f$ .

Las condiciones (i) y (ii) de la definición de singularidad transversa son una generalización de modo natural la condición (\*) de la fórmula de Yomdin del capítulo anterior. En este sentido, la fórmula para el número de Milnor del Teorema de 3.2.3 generaliza la obtenida en el caso de Yomdin.

**3.2.2. Teorema.** *Supongamos que  $(V, 0)$  es transversa, entonces el germen de superficie  $(V, 0)$  tiene un punto singular aislado en 0.*

*Demostración:* Sea  $\pi : (\tilde{\mathbb{C}}^3, E) \rightarrow (\mathbb{C}^3, 0)$  la transformación cuadrática de  $(\mathbb{C}^3, 0)$  con centro el origen. Sea  $E := \pi^{-1}(0) \simeq \mathbb{P}^2$  el divisor excepcional de  $\pi$  y sea  $(\tilde{V}, D)$  la transformada estricta de  $(V, 0)$ . Ya se ha visto en el capítulo anterior de la memoria que si  $\text{Sing}(D)$  es vacío entonces  $(V, 0)$  es una superficie con singularidad aislada.

Supongamos pues que existe un punto  $P$  que sea singular para  $D$ . Se eligen coordenadas de modo que la dirección tangente de  $V$  que se corresponde con  $P$  sea  $(x, y, z) = (0, 0, 1)$ . En este caso las ecuaciones locales de  $\pi$  son  $x = x_1 z_1$ ,  $y = y_1 z_1$ ,  $z = z_1$ . La ecuación de  $\tilde{V}$  en un entorno de  $\tilde{P} = (0, 0, 0)$  es

$$\begin{aligned} 0 &= \tilde{f}(x_1, y_1, z_1) = z_1^{-d} f(x_1 z_1, y_1 z_1, z_1) \\ &= f_d(x_1, y_1, 1) + z_1^k (f_{d+k}(x_1, y_1, 1) + z_1 g(x_1, y_1, z_1)), \end{aligned}$$

donde  $f_d(x_1, y_1, 1)$  es una ecuación afín de  $D$  y  $z_1 = 0$  es una ecuación local del divisor excepcional  $E$ . La ecuación de  $\tilde{V}$  va a depender de la clase de singularidad que tenga  $D$  del siguiente modo:

- (i) Si  $P \in \text{Sing}(D_{\text{red}})$  entonces, por hipótesis,  $f_{d+k}(0, 0, 1)$  es no nulo y localmente define una unidad en el anillo de series  $\mathbb{C}\{x_1, y_1, z_1\}$ . Sea  $u(x_1, y_1, z_1)$  una raíz  $k$ -ésima de esa unidad. Si se realiza el siguiente cambio analítico de coordenadas  $\bar{x} = x_1$ ,  $\bar{y} = y_1$ ,  $\bar{z} = z_1 u$ ,  $\tilde{P}$  tiene coordenadas  $(0, 0, 0)$  y una ecuación local de  $\tilde{V}$  en un entorno de  $\tilde{P}$  es

$$f_d(\bar{x}, \bar{y}, 1) + \bar{z}^k = 0,$$

donde  $f_d(\bar{x}, \bar{y}, 1) = 0$  es una ecuación local de  $D$  en  $P$ . Además, la nueva ecuación local de  $E$  es  $\bar{z} = 0$  y si ahora se calculan las singularidades de  $\tilde{V}$  en un entorno de  $\tilde{P}$  se ve que deben estar contenidas en  $E$ .

- (ii) Para cada  $i \in \{1, \dots, r\}$  con  $q_i > 1$ , sea  $P \in C_i$  un punto tal que  $P$  es un punto liso de  $C_i$  y no está en la intersección de las curvas  $C_i$  y  $T$ . En estas condiciones y usando los mismos argumentos que en (i), existe un cambio local de coordenadas tal que la ecuación local de  $\tilde{V}$  en un entorno de  $\tilde{P}$  es

$$\bar{x}^{q_i} + \bar{z}^k = 0,$$

donde  $\bar{x} = 0$  es una ecuación local para el germen de  $C_i$  en  $P$  y  $E$  es  $\bar{z} = 0$ . Por tanto las singularidades de  $\tilde{V}$  en un entorno de  $\tilde{P}$  están contenidas en  $E$ .

- (iii) Finalmente, sea  $P$  un punto en la intersección de  $C_i$  y  $T$ . Por hipótesis la intersección es transversal, se puede elegir de nuevo un sistema local de parámetros tal que la ecuación local de  $\tilde{V}$  en un entorno de  $\tilde{P}$  sea

$$\bar{x}^{q_i} + \bar{z}^k \bar{y} = 0,$$

donde  $\tilde{x} = 0$  es una ecuación local del germen de  $C_i$  en  $P$ ,  $\tilde{y} = 0$  es una ecuación local del germen de  $T$  en  $P$  y  $E$  tiene por ecuación  $\tilde{z} = 0$ . Basta calcular el jacobiano de la función analítica anterior para darse cuenta que la singularidades de  $\tilde{V}$  en un entorno de  $\tilde{P}$  están contenidas en  $E$ .

Esto concluye la demostración del teorema.  $\square$

Cualquier curva proyectiva plana reducida sólo tiene puntos singulares aislados y por tanto el número de Milnor generalizado  $\mu(C)$  es igual a la suma de los números de Milnor de la curva  $C$  en sus puntos singulares, ver la propiedad 1 del número de Milnor generalizado :

$$\mu(C) = \sum_{P \in \text{Sing}(C)} \mu(C, P) = \sum_{P \in C} \mu(C, P).$$

Sin embargo, si por ejemplo  $C$  es la curva de  $\mathbb{P}^2$  definida como el conjunto de ceros del polinomio homogéneo de grado 6,  $(zx^2 + y^3)^2$ , entonces usando la propiedad 4 del número de Milnor generalizado se tiene que

$$\mu(C) - \mu(C_{\text{lisa}}^6) = (-1)^2(\chi(C) - \chi(C_{\text{lisa}}^6)),$$

y como la característica de Euler-Poincaré de una curva lisa de grado seis es 18 y la  $\chi(C_{\text{red}})$  es 2, se tiene que  $\mu(C) = 20$ .

Para las singularidades de superficies transversas, en el siguiente teorema se calcula su número de Milnor y se le relaciona con  $d$ ,  $p$ ,  $k$ ,  $\mu(D_{\text{red}})$ .

**3.2.3. Teorema.** *Si el germen de superficie  $(V, 0)$  es transverso entonces el número de Milnor de  $(V, 0)$  es igual a*

$$\mu(V, 0) = (d - 1)^3 + k \cdot (\mu(D_{\text{red}}) + (d - p)(2d - 3 + p)) + k^2 \cdot (d - p).$$

**3.2.4. Observación.** Sólo estamos interesados en el caso en que exista algún  $q_i > 1$ . En caso contrario,  $D$  es reducido y la condición (i) de la definición de singularidad transversa recupera la condición (\*) de la fórmula de Yomdin del capítulo anterior y la fórmula para el número de Milnor coincide sin más que hacer  $d = p$ .

Además, si algún  $q_i > 1$ , la condición (ii) implica que  $T$  es una curva reducida.

**Demostación del Teorema.** La demostración de este Teorema se hará en en varias etapas las cuales vendrán introducidas como lemas.

Supongamos primero que  $k > 1$ . La demostración cuando  $k = 1$  será inmediata a partir de la demostración del caso  $k > 1$ .

Como el germen  $(V, 0)$  tiene singularidad aislada, el Lema de 3.1.4 asegura que existe una superficie proyectiva compleja  $V$  de  $\mathbb{P}^3$  tal que  $V$  tiene un único punto singular aislado  $e$  y las singularidades de  $V$  en  $e$  y del germen  $(V, 0)$  son analíticamente equivalentes.

Sea  $\pi : \tilde{\mathbb{P}}^3 \rightarrow \mathbb{P}^3$  la transformación cuadrática de  $\mathbb{P}^3$  con centro en  $e$ , sea  $\tilde{V}$  la transformada estricta de  $V$  y sea  $E := \pi^{-1}(e)$  el divisor excepcional. Como  $V$  tiene sólo a  $e$  como punto singular aislado, las singularidades de  $\tilde{V}$  están contenidas en  $\tilde{V} \cap E$ . Entonces

$Sing(\tilde{V})$  está formado por las curvas  $C_i$ , tales que  $q_i > 1$ , y por los puntos singulares de  $D_{red}$ .

La **primera fórmula**, (3.3), del número de Milnor de la sección anterior nos da la igualdad:

$$(3.5) \quad \mu(\tilde{V}) = \mu(V, 0) + (-1)^3(\chi(D) - 1) - (d - 1)^3 + (-1)^3 - (-1)^3 h(2, d),$$

donde  $\mu(\tilde{V})$  es el número de Milnor generalizado de  $\tilde{V}$  en  $\tilde{\mathbb{P}}^3$ .

Ahora, la característica de Euler de  $D$  es igual a la la característica de Euler de  $D_{red}$  y depende sólo del grado de  $D_{red}$  y de los números de Milnor de las singularidades de  $D_{red}$ :

$$\chi(D_{red}) = p(p - 3) + \mu(D_{red}).$$

Así, la igualdad (3.5) es equivalente a

$$(3.6) \quad \mu(V, 0) = (d - 1)^3 + \chi(D_{red}) - 3d + d^2 + \mu(\tilde{V}),$$

**Cálculo de  $\mu(\tilde{V})$ .** Ahora se quiere aplicar la Propiedad 9 del número de Milnor generalizado a la superficie  $\tilde{V} \subset \tilde{\mathbb{P}}^3$ . Sea  $L$  el fibrado lineal  $\mathcal{O}_{\tilde{\mathbb{P}}^3}(l)$ . Cualquier polinomio homogéneo de grado  $l$  que defina  $V$ , da una sección global  $v$  de  $L$ . La superficie  $\tilde{V}$  es el conjunto de ceros de la sección  $s = \pi^*(v) \otimes e^{-d}$  del fibrado lineal  $\pi^*(L) \otimes \mathcal{E}^{-d}$ , donde  $\mathcal{E}$  denota el fibrado lineal sobre  $\tilde{\mathbb{P}}^3$ , asociado con el divisor excepcional de  $\pi$ , y  $e$  es una sección de  $\mathcal{E}$ .

Necesitamos una sección holomorfa global  $s' \in H^0(\tilde{\mathbb{P}}^3, \pi^*(L) \otimes \mathcal{E}^{-d})$  y una estratificación de Whitney  $\mathcal{S}$  de  $\tilde{V}$  tales que el conjunto de ceros de  $s'$  debe ser liso y transversal a cada estrato de  $\mathcal{S}$ .

**La estratificación de Whitney adecuada.** Para construir la estratificación de Whitney adecuada lo primero que se hace es una partición del lugar singular de  $\tilde{V}$ .

Sea la siguiente partición del conjunto finito  $Sing(D_{red})$ . Sea  $A_l$  el subconjunto de  $Sing(D_{red})$  formado por los puntos singulares  $P$  de  $D_{red}$ , tales que  $P$  pertenece, exactamente, a  $l$  componentes irreducibles de  $D_{red}$ . De este modo tenemos la partición del conjunto  $Sing(D_{red})$ :

$$Sing(D_{red}) = A_1 \cup \dots \cup A_r$$

donde los conjuntos  $A_l$  son disjuntos dos a dos. Los puntos  $P \in A_1$  se caracterizan por el hecho de que existe una única componente irreducible  $C_i$  de  $D_{red}$  tal que  $P \in C_i$  y por tanto  $\mu(D_{red}, P) = \mu(C_i, P)$ .

Para cada  $i \in \{1, \dots, r\}$ , se considera la curva proyectiva plana reducida

$$B_i := C_1 + \dots + \widehat{C_i} + \dots + C_r.$$

donde la notación  $\widehat{C_i}$  indica que no se considera la curva  $C_i$ , es decir como divisores del plano proyectivo se tiene  $B_i = D_{red} - C_i$ . Sea  $\Lambda$  el subconjunto de índices

$$\Lambda = \{i \in \{1, \dots, r\} : \text{ tal que } q_i > 1\}.$$

Para cada  $i \in \Lambda$ , se definen los siguientes conjuntos:

$$\begin{aligned} H_i &:= \{ P \in C_i, \text{ tal que } P \in \text{Sing}(C_i) \text{ y } P \notin C_i \cap B_i \}. \\ J_i &:= \{ P \in C_i, \text{ tal que } P \in B_i \}. \\ M_i &:= \{ P \in C_i, \text{ tal que } P \in T \}. \\ S_i &:= C_i \setminus \{ H_i \cup J_i \cup M_i \}. \end{aligned}$$

Nótese que, como  $J_i \subset \text{Sing}(D_{\text{red}})$ , los conjuntos  $H_i$ ,  $J_i$  y  $M_i$  son disjuntos. Además se tienen las siguientes identificaciones:

$$\begin{aligned} H_i &:= \{ P \in C_i, \text{ tal que } P \in A_1 \}. \\ J_i &:= \{ P \in C_i, \text{ y existe } l > 1 \text{ tal que } P \in A_l \}. \end{aligned}$$

Finalmente, se consideran los conjuntos

$$\begin{aligned} \text{Reg}(\tilde{V}) &:= \tilde{V} \setminus \text{Sing}(\tilde{V}), \\ W &:= \text{Sing}(D_{\text{red}}) \setminus \bigcup_{\{i \in \Lambda\}} C_i. \end{aligned}$$

Vamos a considerar una estratificación de  $\tilde{V}$ , en este punto identificamos los puntos de  $D$  con los puntos de  $\tilde{V}$  que están contenidos en el divisor excepcional. Sea  $\mathcal{S}$  la siguiente partición de  $\tilde{V}$ . Las componentes de la partición son: una componente 2-dimensional  $\text{Reg}(\tilde{V})$ , las componentes 1-dimensionales  $\{S_i\}_{i \in \Lambda}$  y las componentes 0-dimensionales  $\{H_i\}_{i \in \Lambda}$ ,  $\{A_l \setminus W\}_{l > 1}$ ,  $\{M_i\}_{i \in \Lambda}$  y  $W$ .

**3.2.5. Lema.** *La anterior partición  $\mathcal{S}$  de  $\tilde{V}$  es una estratificación de Whitney.*

*Demostración:* La partición es una estratificación de  $\tilde{V}$  ya que cada componente es una variedad diferenciable, a excepción de los puntos, y se verifica la condición de finitud local: cada punto de  $\tilde{V}$  tiene un entorno abierto en  $\tilde{\mathbb{P}}^3$  el cual corta sólo a una cantidad finita de componentes. Para probar el lema sólo necesitamos las siguientes dos observaciones:

- (i) Cualquier estrato  $\text{Reg}(\tilde{V})$ , ó  $S_i$ , sobre un estrato 0-dimensional verifica las condiciones de Whitney, ya que sobre estratos de dimensión cero siempre se cumplen las condiciones de Whitney, ver e.g. Lemma 1.10. [Dimca].
- (ii) Para ver que el par de estratos  $(\text{Reg}(\tilde{V}), S_i)$  verifican las condiciones (a) y (b) de Whitney usamos la equivalencia entre condiciones de Whitney y la constancia de la sucesión  $\mu^*$ , ver [Teissier 1] y [B-S 2]. En nuestro caso, sea  $a$  un punto de  $S_i$  en  $\tilde{\mathbb{P}}^3_{\mathbb{C}}$ . Existen coordenadas locales  $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$  centradas en  $a$  tales que la ecuación local de  $V$  en un entorno de  $a$  es

$$\bar{x}^{q_i} + \bar{z}^k = 0,$$

y las ecuaciones locales que describen  $S_i$  son

$$\bar{x} = 0, \bar{z} = 0.$$

Podemos pensar  $\text{Reg}(\tilde{V})$  como la familia de (gérmenes) de curvas planas, dada por la ecuación local  $\bar{x}^{q_i} + \bar{z}^k = 0$ , que es topológicamente trivial a lo largo de  $S_i$ , y por tanto verifica la condición  $\mu^*$ -constante.

□

**La sección holomorfa adecuada.** Hace falta una sección global del fibrado lineal  $\pi^*(L) \otimes \mathcal{E}^{-d}$  sobre  $\widetilde{\mathbb{P}^3}$  que verifique las condiciones de regularidad y transversalidad que busquemos.

**3.2.6. Lema.** *Existe una sección  $s' \in H^0(\widetilde{\mathbb{P}^3}, \pi^*(L) \otimes \mathcal{E}^{-d})$  tal que, si  $V'$  es el conjunto de ceros de  $s'$ , entonces  $V'$  es liso y transverso a cada estrato de la anterior estratificación  $\mathcal{S}$ .*

*Demostración:* Denotemos por  $\bar{V}$  la variedad quasiproyectiva  $V - \{e\}$  de  $\mathbb{P}^3$ . Sea  $\delta$  el sistema lineal de divisores  $S$  de grado  $l$  tales que la multiplicidad de  $S$  en  $e$  es, exactamente,  $d$ . El único punto base de este sistema lineal es  $e$ . Si se restringe  $\delta$  a  $\bar{V}$  y se aplica el Teorema de Bertini, ver [Hartshorne], Corollary 10.9, existe un conjunto abierto (denso) de Zariski  $U_0$  de la variedad proyectiva que  $\delta$  define, tal que, cada elemento  $V_1$  de  $U_0$ , considerado como subesquema cerrado de  $\bar{V}$ , es liso; así,  $V_1$  es transversal a  $\bar{V}$ .

Por otro lado, sea  $\mathcal{C}_d$  la variedad proyectiva que parametriza las curvas planas de grado  $d$ . Sea  $U$  el abierto (denso) de Zariski de  $\mathcal{C}_d$  formado por las curvas lisas  $G_d$ , transversas a  $D_{red}$  y tales que  $G_d \subset \mathbb{P}^2 \setminus \cup_{i \in \Lambda} M_i$ .

Sea el abierto (denso) de Zariski  $U_1$  de la variedad proyectiva que  $\delta$  define, formado por aquellas superficies  $S$  tales que el proyectivizado del cono tangente de  $S$  en  $e$  pertenece al abierto  $U$  elegido anteriormente en el espacio de las curvas.

Se elige una superficie  $V_1$  en la intersección de los abiertos  $U_0$  y  $U_1$ . La superficie  $V_1$  tiene un único punto singular aislado en  $e$ . Sea  $s_1$  una sección de  $L$  tal que  $V_1$  es su conjunto de ceros. Entonces  $s' := \pi^*(s_1) \otimes e^{-d}$  define una sección holomorfa global del fibrado lineal  $\pi^*(L) \otimes \mathcal{E}^{-d}$ . Además, el conjunto de ceros  $V'$  de  $s'$  verifica:

(a) La superficie  $V'$  es lisa ya que  $V_1$  tiene sólo un punto singular en  $e$  y el proyectivizado del cono tangente de  $V_1$  en  $e$  es una curva lisa.

(b) La superficie  $V'$  es transversal a cada estrato de  $\mathcal{S}$ . Basta observar que antes de realizar la transformación cuadrática las superficies  $V - \{e\}$  y  $V_1 - \{e\}$  son transversas y que ambos conos tangentes en  $e$  son también transversales.

Esto completa la demostración. □

El lema anterior, la Propiedad 9 del número de Milnor generalizado y el hecho de que sobre el estrato  $Reg(\tilde{V})$  el número de Milnor topológico vale cero, ya que son puntos regulares de  $\tilde{V}$ , nos da que

$$(3.7) \quad \mu(\tilde{V}) = \sum_{i \in \Lambda} \left\{ \bar{\mu}_{S_i} \chi(S_i \setminus V') + \sum_{P \in H_i} \bar{\mu}_P + \sum_{P \in M_i} \bar{\mu}_P \right\} + \sum_{l=2}^r \sum_{P \in A_l \setminus W} \bar{\mu}_P + \sum_{P \in W} \bar{\mu}_P$$

donde recordemos que  $\bar{\mu}_P$  y  $\bar{\mu}_{S_i}$  son los números de Milnor topológicos en los correspondientes estratos.

**3.2.7. Lema. Estratos 1-dimensionales.** Sea  $S_i$  un estrato 1-dimensional de  $S$ . Entonces,

$$\bar{\mu}_{S_i} = -(q_i - 1)(k - 1),$$

$$\chi(S_i \setminus V') = 3d_i - d_i^2 + \mu(C_i) - \#(H_i) - \#(J_i) - d_i(2d + k),$$

donde  $\#(A)$  denota el cardinal del conjunto finito  $A$ .

*Demostración:* Sea  $a$  un punto de  $S_i$ , se eligen coordenadas locales  $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$  centradas en  $a$  de tal modo que la ecuación local de  $\tilde{V}$  en un entorno de  $a$  sea  $\bar{x}^{q_i} + \bar{z}^k = 0$ , y las ecuaciones locales de  $S_i$  en un entorno de  $a$  sean  $\bar{x} = 0$ ,  $\bar{z} = 0$ . Como el par  $(\text{Reg}(\tilde{V}), S_i)$  satisface las condiciones de Whitney, entonces por la Propiedad 8 del número de Milnor generalizado nos da el valor del número de Milnor topológico en este estrato:

$$\bar{\mu}_{S_i} = (-1)\mu^{(2)}(\tilde{V}, a) = -(q_i - 1)(k - 1).$$

Por otro lado, para calcular la característica de Euler-Poincaré se puede ver el conjunto  $S_i \setminus V'$  sumergido en  $\mathbb{P}^2$ . Por hipótesis, la intersección de  $C_i$  y  $V'$  son  $d_i \cdot d$  puntos. Así,  $\chi(S_i \setminus V') = \chi(S_i) - d_i \cdot d$ . Observar que, para todo  $i \in \Lambda$ , el cardinal del conjunto  $M_i$  es  $d_i(d + k)$ . Para finalizar la demostración del lema, basta substituir en la fórmula de la característica de Euler-Poincaré de  $C_i$ ,

$$\chi(S_i \setminus V') = \chi(S_i) - d_i \cdot d = \chi(C_i) - \#(H_i) - \#(J_i) - d_i(d + k) - d_i d.$$

□

**Estratos 0-dimensionales.** Recordemos las ecuaciones locales de  $V'$  en los puntos que se corresponden a los estratos 0-dimensionales, ver el Teorema de 3.2.2.

1. Si  $P \in W$  ó  $P \in \{A_l \setminus W\}_{l>1}$ , entonces una ecuación local de  $V'$  en un entorno de  $\tilde{P}$  es

$$(3.8) \quad h(\bar{x}, \bar{y}) + \bar{z}^k = 0,$$

donde  $h = 0$  es una ecuación del germen de  $D$  en  $P$ .

2. Si  $P \in H_i$ , entonces una ecuación local de  $V'$  en un entorno de  $\tilde{P}$  es

$$(3.9) \quad (h(\bar{x}, \bar{y}))^{q_i} + \bar{z}^k = 0,$$

donde  $h = 0$  es una ecuación del germen de  $C_i$  en  $P$ .

3. Si  $P \in M_i$ , una ecuación local de  $V'$  en un entorno de  $\tilde{P}$  es

$$(3.10) \quad \bar{x}^{q_i} + \bar{z}^k \bar{y} = 0,$$

donde  $x = 0$  es una ecuación del germen de  $C_i$  en  $P$ .

En todos los casos, es necesario calcular el número de Milnor topológico del germen de superficie  $(S, 0)$  definido por una función analítica del tipo  $f(u, v, w) = w^k + h(u, v)$ . Sea  $(C, 0)$  el (germen de) curva definido por  $h(u, v) = 0$ .

**3.2.8. Lema.** *Con las notaciones anteriores, el número de Milnor topológico del germen de superficie  $(S, 0)$  es  $(k - 1)$  veces el número de Milnor topológico de  $(C, 0)$ .*

*Demostración:* Sea la función analítica  $\tilde{f}(u, v, w) = x + h(y, z)$ . Se considera las fibraciones de Milnor asociadas a las funciones  $f, \tilde{f}$  y  $h$ . Se puede elegir el mismo  $\delta$  y  $\epsilon$  para las tres fibraciones. Denotemos por  $F_f$  la fibra de Milnor en el 0 asociada a  $f$ , por  $F_{\tilde{f}}$  la fibra de Milnor en el 0 asociada a  $\tilde{f}$  y por  $F_h$  la fibra de Milnor en el 0 asociada a  $h$ , es decir,

$$F_f = \{(u, v, w) : w^k + h(u, v) = \delta, \|(u, v, w)\| < \epsilon\},$$

$$F_{\tilde{f}} = \{(x, y, z) : z + h(x, y) = \delta, \|(x, y, z)\| < \epsilon\},$$

$$F_h = \{(x, y) : h(x, y) = \delta, \|(x, y)\| < \epsilon\}.$$

La aplicación  $\pi : F_f \rightarrow F_{\tilde{f}}, \pi(u, v, w) = (u, v, w)$  es una aplicación recubridora y por tanto, se puede ver  $F_f$  como una cubierta cíclica de  $k$ -hojas de  $F_{\tilde{f}}$  ramificada. El lugar de ramificación de la cubierta es  $F_h$ .

Como el lugar de ceros de la función analítica  $\tilde{f}$  es un germen de superficie lisa, la fibra de Milnor  $F_{\tilde{f}}$  es contractible, ver [Milnor]; por tanto,  $\chi(F_{\tilde{f}}) = 1$ .

Para cubiertas ramificadas se tiene que la característica de Euler-Poincaré verifica la siguiente propiedad, ver e.g. [Viro],

$$\chi(F_f) = k \chi(F_{\tilde{f}}) - (k - 1) \chi(F_h) = k - (k - 1) \chi(F_h).$$

Se concluye que

$$\mu(S, 0) = (-1)^2(\chi(F_f) - 1) = (k - 1)(1 - \chi(F_h)) = (k - 1)\mu(C, 0).$$

□

Con el lema previo se puede dar la siguiente descripción del número de Milnor generalizado en los puntos correspondientes a estratos 0-dimensionales:

- (i) Por (3.8), si  $P \in W$ , los ceros de la función  $h$  definen el germen de  $D$  en  $P$ . Como  $D$  tiene un punto singular aislado en  $P$ , ya que  $P$  es un punto de  $W$ , entonces

$$(3.11) \quad \bar{\mu}_{\tilde{P}} = (k - 1)\mu(D_{red}, P).$$

- (ii) Igualmente, por (3.8), si  $P \in \{A_l \setminus W\}_{l>1}$ , la función  $h$  da también una ecuación local de  $D$  en  $P$ . Sin embargo, ahora  $h$  no es reducida ya que  $P \in C_i$ . Entonces

$$(3.12) \quad \bar{\mu}_{\tilde{P}} = (k - 1)(1 - \chi(F_h)).$$



- (iii) Si  $P \in H_i$ , la función  $h$  es  $g^{q_i}$ , donde la ecuación  $g = 0$  es una ecuación local de  $C_i$  en  $P$ , ver (3.9). Por tanto  $\bar{\mu}_{\bar{P}} = (k-1)(1 - \chi(F_h))$ . Además en este caso,  $F_h$  es una cubierta de  $q_i$  hojas de  $F_g$  sin ramificación. Así,  $\bar{\mu}_P = (k-1)(1 - q_i\chi(F_g))$ . Como  $C_i$  es un germen de curva plana reducida, se tiene que  $\chi(F_g) = 1 - \mu(C_i, P)$  y que

$$\bar{\mu}_{\bar{P}} = (k-1)(1 - q_i + q_i\mu(C_i, P)),$$

De este modo, para cada  $i \in \Lambda$ ,

$$(3.13) \quad \sum_{P \in H_i} \bar{\mu}_{\bar{P}} = (1 - q_i)(k-1)\#(H_i) + (k-1)q_i \sum_{P \in A_1 \cap C_i} \mu(C_i, P).$$

- (iv) Si  $P \in M_i$ , la función  $h$  es  $z^k y$ , ver (3.10), y se sabe que en este caso que la característica de Euler-Poincaré de  $F_h$  es cero, basta aplicar la fórmula del Corolario de 1.3.10 del primer capítulo. Entonces  $\bar{\mu}_{\bar{P}} = (q_i - 1)$ , y

$$(3.14) \quad \sum_{P \in M_i} (q_i - 1) = (q_1 - 1)\#(M_i) = (q_i - 1)(d + k)d_i.$$

**La igualdad a demostrar.** Después del Lema de 3.2.7, las identidades (3.11), (3.12), (3.13) y (3.14), la igualdad (3.6) se puede escribir de la siguiente manera:

$$(3.15) \quad \begin{aligned} \mu(V, 0) &= (d-1)^3 + 3p - p^2 + \mu(D_{red}) - 3d + d^2 + (d+k) \sum_{i \in \Lambda} (q_i - 1)d_i \\ &+ (k-1) \sum_{i \in \Lambda} \left\{ -(q_i - 1)(3d_i - d_i^2 + \mu(C_i) - \#(J_i) - 2dd_i - d_i k) \right\} \\ &+ (k-1) \sum_{l=2}^r \left\{ \sum_{P \in A_l \setminus W} (1 - \chi(F_{h_P})) \right\} + (k-1) \sum_{P \in W} \mu(D_{red}, P) \\ &+ (k-1) \sum_{i \in \Lambda} q_i \left\{ \sum_{P \in A_1 \cap C_i} \mu(C_i, P) \right\}, \end{aligned}$$

donde  $h_P$  es la función analítica que define el germen de curva  $D$  en  $P$  y  $F_{h_P}$  es la fibra de Milnor en  $P$ .

El lado derecho de la igualdad (3.15), se puede ver un polinomio de grado 2 en  $k$ . Calculemos los coeficientes de dicho polinomio.

**Coeficiente de  $k^2$ .** Este coeficiente es inmediato de calcular ya que simplemente es

$$\sum_{i \in \Lambda} -(q_i - 1)(-d_i) = \sum_{i=1}^r (q_i - 1)d_i = d - p.$$

**Término independiente.** Para que se verifique la fórmula del teorema el término independiente debe ser igual a  $(d-1)^3$ . De este modo, es suficiente probar la siguiente igualdad:

$$0 = 3p - p^2 + \sum_{P \in W} \mu(D_{red}, P) + \sum_{P \in A_1 \setminus W} \mu(D_{red}, P) + \sum_{\substack{P \in A_l \setminus W \\ 2 \leq l \leq r}} \mu(D_{red}, P) - 3d + d^2$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{i \in \Lambda} (q_i - 1)(3d_i - d_i^2 - dd_i) + \sum_{i \in \Lambda} (q_i - 1) \left( \sum_{P \in A_1 \cap C_i} \mu(C_i, P) + \sum_{\substack{P \in \{A_l \setminus W\} \cap C_i \\ 2 \leq l \leq r}} \mu(C_i, P) \right) \\
& - \sum_{i \in \Lambda} (q_i - 1) \#(J_i) - \sum_{l=2}^r \sum_{P \in A_l \setminus W} (1 - \chi(F_{h_P})) - \sum_{P \in W} \mu(D_{red}, P) - \sum_{i \in \Lambda} q_i \sum_{P \in A_1 \cap C_i} \mu(C_i, P).
\end{aligned}$$

Las siguientes dos igualdades inmediatas

$$3p - p^2 - 3d + d^2 + \sum_{i \in \Lambda} (q_i - 1)(3d_i - d_i^2 - dd_i) = -2 \sum_{1 \leq i < j \leq r} d_i d_j - \sum_{i=1}^r q_i d_i^2 + dp,$$

$$\sum_{P \in A_1 \setminus W} \mu(D_{red}, P) + \sum_{i \in \Lambda} (q_i - 1) \sum_{P \in A_1 \cap C_i} \mu(C_i, P) - \sum_{i \in \Lambda} q_i \sum_{P \in A_1 \cap C_i} \mu(C_i, P) = 0,$$

las sustituimos en la igualdad anterior y sólo es necesario probar que

$$\begin{aligned}
0 &= -2 \sum_{1 \leq i < j \leq r} d_i d_j - \sum_{i=1}^r q_i d_i^2 + dp + \sum_{\substack{P \in A_l \setminus W \\ 2 \leq l \leq r}} (\mu(D_{red}, P) - 1 + \chi(F_{h_P})) \\
(3.16) \quad & + \sum_{i \in \Lambda} (q_i - 1) \left( \sum_{\substack{P \in \{A_l \setminus W\} \cap C_i \\ 2 \leq l \leq r}} \mu(C_i, P) \right) - \sum_{i \in \Lambda} (q_i - 1) \#(J_i).
\end{aligned}$$

Es interesante, en este punto, calcular los cardinales de los conjuntos  $J_i$  en función de invariantes globales de la curva  $D_{red}$  y de sus componentes. Para ello se realizan los siguientes cálculos:

**El cardinal de  $J_i$ .** Las curvas  $B_i$  y  $C_i$  no tienen componentes en común, tienen grados  $p - d_i$  y  $d_i$ , por lo que el Teorema de Bézout garantiza que

$$(p - d_i)p_i = \sum_{P \in C_i \cap B_i} (C_i, B_i)_P.$$

Además, aplicando el Lema de 1.2.11 del primer capítulo a este par de gérmenes de curvas planas reducidas, el número de Milnor verifica que

$$\mu(D_{red}, P) = \mu(C_i + B_i, P) = \mu(C_i, P) + \mu(B_i, P) + 2(C_i, B_i)_P - 1.$$

Tomando la suma en todos los puntos posibles de la intersección de  $C_i$  y  $B_i$ , es decir en todos los puntos de  $J_i$ , se tiene que

$$\#(J_i) = \sum_{P \in C_i \cap B_i} \mu(C_i, P) + \sum_{P \in C_i \cap B_i} \mu(B_i, P) + 2d_i(p - d_i) - \sum_{P \in C_i \cap B_i} \mu(D_{red}, P).$$

Para cada  $P \in C_i \cap B_i$ , en particular  $P$  es un punto singular de  $D_{red}$ , existe un único  $l$ , con  $l \in \{2, \dots, r\}$ , tal que  $P \in A_l$ , y por tanto

$$\#(J_i) = \sum_{\substack{P \in C_i \cap A_l \\ 2 \leq l \leq r}} \{\mu(C_i, P) + \mu(B_i, P) + \mu(D_{red}, P)\} + 2d_i(p - d_i).$$

Debido a que  $P$  es un punto de  $C_i$  y de  $A_l$ , existen, exactamente,  $l - 1$  componentes irreducibles distintas de  $D_{red}$ , a las que denotaremos por  $C_{i_2}, \dots, C_{i_l}$ , todas distintas de  $C_i$ , tales que  $P \in C_i \cap C_{i_2} \cap \dots \cap C_{i_l}$ . Por tanto el número de Milnor del germen de curva plana reducida  $C_{i_2} + \dots + C_{i_l}$  en  $P$  viene dado por

$$\mu(C_{i_2} + \dots + C_{i_l}, P) = \sum_{j=2}^l \mu(C_{i_j}, P) + 2 \sum_{2 \leq j < n \leq l} (C_{i_j}, C_{i_n})_P - (l - 2).$$

Esta última igualdad nos da los números de Milnor  $\mu(B_i, P)$ . Por tanto el cardinal de  $J_i$  se puede escribir como

$$\begin{aligned} \#(J_i) &= \sum_{j=2}^l \sum_P \left\{ \mu(C_i, P) + \sum_{j=2}^l \mu(C_{i_j}, P) + 2 \sum_{2 \leq j < n \leq l} (C_{i_j}, C_{i_n})_P - (l - 2) - \mu(D_{red}, P) \right\} \\ (3.17) \quad &+ 2d_i(p - d_i), \end{aligned}$$

donde, en el segundo gran sumatorio, los puntos  $P$  son tomados de los puntos  $P$  que verifican que  $P \in C_i \cap A_l$  y  $P \in C_i \cap C_{i_2} \cap \dots \cap C_{i_l}$ .

Sustituyendo en (3.16) la expresión (3.17) para el cardinal de  $J_i$ , se debe demostrar la siguiente igualdad:

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{i \in \Lambda} (q_i - 1) \left\{ \sum_{\substack{P \in C_i \cap C_{i_2} \cap \dots \cap C_{i_l} \\ P \in C_i \cap A_l; 2 \leq l \leq r}} (l - 2) + \mu(D_{red}, P) - \sum_{j=2}^l \mu(C_{i_j}, P) - 2 \sum_{2 \leq j < n \leq l} (C_{i_j}, C_{i_n})_P \right\} \\ &\quad - 2 \sum_{1 \leq i < j \leq r} d_i d_j - \sum_{i=1}^r q_i d_i^2 + dp - \sum_{i=1}^s (q_i - 1) 2d_i(p - d_i) \\ (3.18) \quad &+ \sum_{\substack{P \in A_l \setminus W \\ 2 \leq l \leq r}} (\mu(D_{red}, P) - 1 + \chi(F_{h_P})). \end{aligned}$$

El siguiente término de la igualdad anterior

$$\sum_{i \in \Lambda} (q_i - 1) \left\{ \sum_{\substack{P \in C_i \cap C_{i_2} \cap \dots \cap C_{i_l} \\ P \in C_i \cap A_l; 2 \leq l \leq r}} (l - 2) + \mu(D_{red}, P) - \sum_{j=2}^l \mu(C_{i_j}, P) - 2 \sum_{2 \leq j < n \leq l} (C_{i_j}, C_{i_n})_P \right\}$$

se puede escribir de la siguiente manera,

$$\begin{aligned} &- 2 \sum_{\substack{P \in C_{i_1} \cap \dots \cap C_{i_l} \\ P \in A_l; 2 \leq l \leq r}} \sum_{2 \leq j < n \leq l} (q_{i_1} + \dots + \widehat{q_{i_j}} + \dots + \widehat{q_{i_n}} + \dots + q_{i_l} - (l - 2)) (C_{i_j}, C_{i_n})_P \\ &- \sum_{\substack{P \in C_{i_1} \cap \dots \cap C_{i_l} \\ P \in A_l; 2 \leq l \leq r}} \sum_{j=1}^l (q_{i_1} + \dots + \widehat{q_{i_j}} + \dots + q_{i_l} - (l - 1)) \mu(C_{i_j}, P) \\ (3.19) \quad &+ \sum_{\substack{P \in C_{i_1} \cap \dots \cap C_{i_l} \\ P \in A_l; 2 \leq l \leq r}} \{ (q_{i_1} + \dots + q_{i_l} - l)(l - 2 + \mu(D_{red}, P)) \}, \end{aligned}$$

donde la notación  $\cdots + \widehat{q_{i_j}} + \cdots$  significa que en la suma no aparece el sumando  $q_{i_j}$ . En estos últimos sumandos, para cada  $P \in C_{i_1} \cap \cdots \cap C_{i_l}$ , se puede calcular el número de Milnor de  $D_{red}$  en  $P$  en función de los números de Milnor de las componentes  $C_{i_j}$  en  $P$  y de las multiplicidades de intersección entre ellas, usando de nuevo la fórmula del Lema de 1.3.10 del primer capítulo:

$$(3.20) \quad \mu(D_{red}, P) = \sum_{j=1}^l \mu(C_{i_j}, P) + 2 \sum_{1 \leq j < n \leq l} (C_{i_j}, C_{i_n})_P - (l-1).$$

Por otro lado, se tiene la siguiente igualdad numérica,

$$(3.21) \quad 2 \sum_{1 \leq i < j \leq r} d_i d_j + \sum_{i=1}^r q_i d_i^2 - dp = - \sum_{i=1}^r d_i (q_i - 1) (p - d_i).$$

Sustituyendo (3.19), (3.20) y (3.21) en (3.18), es suficiente probar que

$$(3.22) \quad dp - \sum_{1 \leq i < j \leq r} d_i d_j - \sum_{i=1}^r q_i d_i^2 = \sum_{\substack{P \in C_{i_1} \cap \cdots \cap C_{i_l} \\ P \in A_l : 2 \leq l \leq r}} \left\{ \sum_{j=1}^l q_{i_j} \mu(C_{i_j}, P) + 2 \sum_{1 \leq j < n \leq l} (q_{i_j} + q_{i_n} - 2) (C_{i_j}, C_{i_n})_P \right\} + \sum_{\substack{P \in C_{i_1} \cap \cdots \cap C_{i_l} \\ P \in A_l : 2 \leq l \leq r}} \left\{ (l-1)^2 - l(l-2) - 1 + \chi(F_{h_P}) - (q_{i_1} + \cdots + q_{i_l}) \right\}.$$

Para cada  $P \in C_{i_1} \cap \cdots \cap C_{i_l}$ , la ecuación del germen de  $D$  en  $P$  es  $h_{i_1}^{q_{i_1}} \cdots h_{i_l}^{q_{i_l}} = 0$ . Por tanto  $h_P = h_{i_1}^{q_{i_1}} \cdots h_{i_l}^{q_{i_l}}$ . Evidentemente esta descomposición no tiene por que ser en componentes irreducibles, pero seguro que es una descomposición adecuada de  $h_P$  a la cual se le puede aplicar el Corolario de 1.3.10 del primer capítulo. Así, la característica de Euler-Poincaré de la fibra de Milnor de  $h_P$  es

$$\chi(F_{h_P}) = - \left( \sum_{1 \leq j < n \leq l} (q_{i_j} + q_{i_n}) (C_{i_j}, C_{i_n})_P - (q_{i_1} + \cdots + q_{i_l}) + \sum_{j=1}^l q_{i_j} \mu(C_{i_j}, P) \right).$$

De nuevo, el Teorema de Bézout garantiza que

$$\sum_{\substack{P \in C_{i_1} \cap \cdots \cap C_{i_l} \\ P \in A_l : 2 \leq l \leq r}} (C_{i_j}, C_{i_n})_P = d_{i_j} d_{i_n}.$$

Estas dos últimas observaciones reducen la igualdad (3.22) a la siguiente identidad trivial,

$$dp - \sum_{1 \leq j < n \leq r} d_j d_n - \sum_{i=1}^r q_i d_i^2 = \sum_{1 \leq j < n \leq r} (q_j + q_n - 2) d_j d_n.$$

Con esto hemos probado que el término independiente en (3.3) es  $(d-1)^3$ .

**Coefficiente de  $k$ .** Los cálculos para obtener este coeficiente van a ser bastante similares a los anteriores. El coeficiente que buscamos simplificar es el siguiente,

$$(3.23) \quad \sum_{i \in \Lambda} \left\{ -(q_i - 1)(3d_i - d_i^2 + \mu(C_i) - \#(J_i) - 2dd_i - d_i + d_i) \right\} \\ + \sum_{l=2}^r \left\{ \sum_{P \in A_l \setminus W} (1 - \chi(F_{h_P})) \right\} + \sum_{P \in W} \mu(D_{red}, P) + \sum_{i \in \Lambda} q_i \left\{ \sum_{P \in A_1 \cap C_i} \mu(C_i, P) \right\}.$$

Usando las identidades de (3.17) y (3.19), el coeficiente de  $k$  es

$$(3.24) \quad \sum_{P \in \text{Sing}(D_{red})} \mu(D_{red}, P) + \sum_{i=2}^r (q_i - 1)(2d_i p - d_i^2 - 3d_i + 2d_i d) \\ + \sum_{\substack{P \in C_{i_1} \cap \dots \cap C_{i_l} \\ P \in A_l, 2 \leq l \leq r}} \{1 - \chi(F_{h_P}) - (q_{i_1} + \dots + q_{i_l} - l)(l - 2 + \mu(D_{red}, P))\} \\ - 2 \sum_{\substack{P \in C_{i_1} \cap \dots \cap C_{i_l} \\ P \in A_l, 2 \leq l \leq r}} \sum_{2 \leq j < n \leq l} (q_{i_1} + \dots + \widehat{q_{i_j}} + \dots + \widehat{q_{i_n}} + \dots + q_{i_l} - (l - 2))(C_{i_j}, C_{i_n})_P \\ - \sum_{\substack{P \in C_{i_1} \cap \dots \cap C_{i_l} \\ P \in A_l, 2 \leq l \leq r}} \sum_{j=1}^l (q_{i_1} + \dots + \widehat{q_{i_j}} + \dots + q_{i_l} - (l - 1))\mu(C_{i_j}, P).$$

Sustituyendo en (3.24) las características de Euler-Poincaré de las fibras de Milnor  $F_{h_P}$  por el valor obtenido en el Corolario de 1.3.10 del primer capítulo, se tiene que el coeficiente de  $k$  es igual a

$$(3.25) \quad \sum_{P \in \text{Sing}(D_{red})} \mu(D_{red}, P) + \sum_{i=2}^r (q_i - 1)(2d_i p - d_i^2 - 3d_i + 2d_i d) \\ - \sum_{\substack{P \in C_{i_1} \cap \dots \cap C_{i_l} \\ P \in A_l, 2 \leq l \leq r}} \sum_{1 \leq j < n \leq l} (q_{i_j} + q_{i_n} - 2)(C_{i_j}, C_{i_n})_P.$$

Y como

$$- \sum_{\substack{P \in C_{i_1} \cap \dots \cap C_{i_l} \\ P \in A_l, 2 \leq l \leq r}} \sum_{1 \leq j < n \leq l} (q_{i_j} + q_{i_n} - 2)(C_{i_j}, C_{i_n})_P = \sum_{1 \leq i < j \leq r} d_i d_j + \sum_{i=1}^r q_i d_i^2 - dp,$$

si se sustituye este valor en (3.25) y se simplifica, el coeficiente de  $k$  queda igual a

$$\sum_{P \in \text{Sing}(D_{red})} \mu(D_{red}, P) + 3p - 3d + 2d^2 - p^2 - pd.$$

Esto finaliza la demostración en el caso  $k > 1$ .

¿Qué ocurre si  $k = 1$ ? La demostración es idéntica al caso  $k > 1$ . Se toma la misma estratificación que antes y la sección se elige del mismo modo. Observar que estos dos hechos no dependen del valor de  $k$ . Si se miran las ecuaciones locales de (3.2.7), (3.8), (3.9) y (3.10) los únicos puntos singulares son los que se corresponden a los estratos  $M_i$ , i.e. a los puntos de intersección de  $C_i$  con  $T$ . La ecuación local de  $\tilde{V}$  en un punto  $\tilde{P}$  de  $M_i$  es la de (3.10), es decir

$$\bar{x}^{q_i} + \bar{z}\bar{y} = 0,$$

donde  $\bar{x} = 0$  es la ecuación local de  $C_i$  en  $P$ , y  $\bar{y} = 0$  es la ecuación de  $T$  en  $P$ . El número de Milnor de  $\tilde{V}$  en cualquiera de estos puntos es  $q_i - 1$ . Como, por hipótesis, la intersección de  $C_i$  y  $T$  son, exactamente,  $d_i(d+1)$  puntos, se tiene que (3.7) se reduce a la siguiente expresión,

$$\mu(\tilde{V}) = \sum_{i \in \Lambda} \sum_{P \in M_i} \bar{\mu}_{\tilde{P}} = \sum_{q_i > 1} (q_i - 1)d_i(d+1) = (d+1)(d-p).$$

Finalmente, si se sustituye esto en 3.6, se obtiene el valor del número de Milnor de  $(V, 0)$  para el caso  $k = 1$ ,

$$\begin{aligned} \mu(V, 0) &= (d-1)^3 + \chi(D_{red}) - 3d + d^2 + (d+1)(d-p) \\ &= (d-1)^3 + (\chi(D_{red}) - 3d + d^2 + d^2 - pd) + (d-p) \quad \square \end{aligned}$$

El siguiente teorema da el número de Milnor de una sección plana genérica de las superficies transversas. El resultado del teorema es más general y la demostración está basada en la fórmula de Yomdin para el caso de curvas, ver el Ejemplo de 2.3.2 del capítulo anterior.

**3.2.9. Teorema.** *Sea  $f : (\mathbb{C}^3, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$  un germen de función analítica tal que  $(V, 0) := (f^{-1}(0), 0)$  es un germen de superficie con singularidad aislada. Sea  $f = f_d + f_{d+k} + \dots$  el desarrollo de  $f$  como suma de componentes homogéneas. Si las curvas planas proyectivas  $\mathcal{Z}(f_d)$  y  $\mathcal{Z}(f_{d+k})$  no tienen ninguna componente en común entonces el número de Milnor de una sección plana genérica de  $(V, 0)$  es*

$$\mu^{(2)}(V, 0) = (d-1)^2 + k \cdot (d-p),$$

donde  $p$  es el grado de la curva reducida  $D_{red}$ .

*Demostración:* Sea la factorización en componentes irreducibles de  $f_d$  en  $\mathbb{C}[x, y, z]$ ,  $f_d = h_1^{q_1} \dots h_r^{q_r}$ . Se consideran las curvas proyectivas planas:

$$\begin{aligned} C_i &:= \mathcal{Z}(h_i), & T &:= \mathcal{Z}(f_{d+k}), \\ D &:= \mathcal{Z}(f_d) = q_1 C_1 + \dots + q_r C_r \end{aligned}$$

donde  $i \in \{1, \dots, r\}$ . Sea  $d_i$  el grado de la curva  $C_i$ , así,  $p := d_1 + \dots + d_r$ .

Se puede suponer que  $D$  no es reducido, ya que en caso contrario la fórmula ya ha sido demostrada en el Lema de 2.1.18 del capítulo anterior.

Sea  $U_0$  el abierto (denso) de Zariski, de la grassmaniana de planos de  $\mathbb{C}^3$  que pasan por el origen, formado por los planos  $H$  tales que el número de Milnor de  $(V \cap H, 0)$  en el origen es mínimo. Se puede pensar indistintamente en planos de  $\mathbb{C}^3$  que pasan por el origen ó en rectas de  $\mathbb{P}^2$ .

Sea  $U_1$  el abierto (denso) de Zariski formado por las rectas de  $\mathbb{P}^2$  que cortan de modo transverso a la curva reducida  $D_{red} + T_{red}$ , este abierto existe por que  $D_{red}$  y  $T_{red}$  no tienen ninguna componente en común.

Sea  $H \in U_0 \cap U_1$ , mediante un cambio homogéneo de coordenadas se puede suponer que  $H = \{z = 0\}$ . En estas condiciones, la ecuación del germen  $(V \cap H, 0)$  es

$$f_d(x, y, 0) + f_{d+k}(x, y, 0) + \dots = 0.$$

Como  $f_d(x, y, 0)$  y  $f_{d+k}(x, y, 0)$  son polinomios homogéneos de dos variables admiten una factorización en producto de polinomios homogéneos de grado uno. Por tanto, podemos escribir ambos polinomios de la siguiente manera

$$\begin{aligned} f_d &= \prod_{i=1}^s (\alpha_i x + \beta_i y)^{m_i} \\ f_{d+k} &= \prod_{j=1}^l (a_j x + b_j y)^{n_j} \end{aligned}$$

Además, como la intersección de  $H$  con  $D_{red} + T_{red}$  es transversal, entonces ninguna raíz de  $f_d(x, y, 0)$  puede ser raíz de  $f_{d+k}(x, y, 0)$ . Para concluir la demostración del Teorema basta aplicar el Ejemplo de 2.3.2 del capítulo anterior.  $\square$

El siguiente corolario es consecuencia inmediata de que el número de Milnor sólo depende de  $D$  y de  $k$ .

**3.2.10. Corolario.** *Toda singularidad de superficie  $(V, 0) \subset (\mathbb{C}^3, 0)$  transversa, definida por una función analítica  $f = f_d + f_{d+k} + \dots$ , tiene el mismo tipo topológico que la singularidad definida por los ceros de  $f = f_d + f_{d+k}$ . Es decir, el orden de  $C^0$ -suficiencia de una singularidad transversa es  $d+k$ . O lo que es lo mismo, toda singularidad transversa es bivalente.*

*Demostración:* Sea  $\mathcal{T} = \{t \in \mathbb{C} : |t| < \epsilon\}$  un entorno abierto del origen en  $\mathbb{C}$  que contenga al 1. Consideramos la deformación  $F(x, y, z, t) = f_d + f_{d+k} + tg(x, y, z)$ , donde  $g$  es la suma de componentes de grado mayor que  $d+k$ . Por los Teoremas de 3.2.3 y de 3.2.9, la deformación tiene la sucesión  $\mu^*$  constante, lo cual implica que el tipo topológico de cada fibra es constante, ver [Teissier 1].  $\square$

### 3.3 Fórmulas de comparación

Se ha demostrado en la sección anterior que las singularidades de superficies transversas son singularidades bivalentes. Estas singularidades aparecen como una generalización natural de las singularidades que verifican la condición (\*) de la fórmula de Yomdin. La generalización es tan natural que la fórmula del número de Milnor de las primeras se especializa en la fórmula para el número de Milnor de las últimas. Por otro lado, ya se observó en el Teorema de 2.4.7 del anterior capítulo que, cuando el proyectivizado del cono tangente era reducido, la fórmula del número de Milnor de las singularidades bivalentes generaliza la fórmula para el número de Milnor de las singularidades que verifican la condición (\*) de la fórmula de Yomdin.

El objetivo ahora es estudiar si existe una fórmula para el número de Milnor de las singularidades bivalentes que no tengan cono tangente reducido, y ver si dicha fórmula generaliza la obtenida en la sección anterior.

Primero se recuerdan las definiciones dadas en la última sección del capítulo anterior.

**Definición.** Un germen de función analítica  $f \in \mathbb{C}\{z_0, \dots, z_n\}$  es *bivalente* si el desarrollo de  $f$  como suma de sus componentes homogéneas tiene sólo dos componentes no nulas, es decir  $f = f_d + f_{d+k}$ .

**Definición.** Un germen de hipersuperficie  $(V, 0) \subset (\mathbb{C}^{n+1}, 0)$  con singularidad aislada define una *singularidad bivalente* si existe un germen de función analítica  $f \in \mathbb{C}\{z_0, \dots, z_n\}$  bivalente tal que el germen de hipersuperficie  $(f^{-1}(0), 0)$  tiene una singularidad aislada y  $(V, 0)$  es topológicamente equivalente a  $(f^{-1}(0), 0)$ .

Se continua denotando por  $D \subset \mathbb{P}^n$  al proyectivizado del cono tangente, es decir al conjunto de ceros de  $f_d$  y por  $T \subset \mathbb{P}^n$  al conjunto de ceros de  $f_{d+k}$ . Además, en el Teorema de 2.4.4 del capítulo anterior se caracterizan las singularidades de superficies bivalentes:

*El lugar de ceros  $(V, 0) \subset (\mathbb{C}^3, 0)$  de un germen de función analítica bivalente, tiene singularidad aislada si y sólo si el conjunto proyectivo  $Sing(D) \cap Sing(T)$  es vacío.*

Para calcular el número de Milnor de una singularidad bivalente se puede proceder del mismo modo que en la sección anterior. En principio, la única diferencia se encontraría en los estratos 0-dimensionales de la estratificación de Whitney. Para cada punto  $P$  del cono tangente tal que  $P \in Sing(D) \cap T$  la ecuación local de  $\bar{V}$  en un entorno de  $\bar{P}$  es de la forma

$$g(\bar{x}, \bar{y}) + \bar{z}^k \bar{y} = 0.$$

Sin embargo, no está claro que se pueda calcular de modo trivial la característica de Euler-Poincaré de la fibra de Milnor en el origen de la función analítica  $g(\bar{x}, \bar{y}) + \bar{z}^k \bar{y}$ . Por



esta razón se necesita otra aproximación distinta al problema.

La idea es comparar el número de Milnor de una singularidad bivalente cualquiera con el número de Milnor de una singularidad bivalente especial: una singularidad transversa. Esta idea se puede poner en práctica en el caso  $k = 1$  gracias a un resultado de M.G. Soares y P.J. Giblin, ver [S-G]. Soares y Giblin obtienen una fórmula de comparación entre los números de Milnor de dos superficies bivalentes del tipo  $f = f_d + f_{d+1}$ , pero no saben calcular, en el caso general, estos números de Milnor.

Soares y Giblin estudian superficies  $V$  de  $\mathbb{P}^3$  definidas por polinomios homogéneos del tipo  $f_d(x, y, z) \cdot w + f_{d+1}(x, y, z)$ . Denotemos por  $D$ , respectivamente por  $T$ , a la curva plana proyectiva definida por  $f_d$ , respectivamente por  $f_{d+1}$ . La superficie proyectiva  $V$  sólo tiene singularidades aisladas si y sólo si  $Sing(D)$  y  $Sing(T)$  tienen intersección vacía, para una demostración ver [S-G] ó el Lema de 3.3.4 de esta sección.

De este modo, si se supone que  $Sing(D)$  y  $Sing(T)$  tienen intersección vacía, la superficie  $V$  tiene en el punto  $e := (x : y : z : w) = (0 : 0 : 0 : 1)$  un punto singular aislado. Por construcción, el germen  $(V, e)$  define una singularidad de superficie bivalente. Recíprocamente, si  $f = f_d + f_{d+1}$  es un germen de función analítica bivalente tal que su lugar de ceros define un germen de superficie con singularidad aislada, i.e.  $Sing(D)$  y  $Sing(T)$  tienen intersección vacía, entonces la superficie  $V$  de  $\mathbb{P}^3$  definida por el polinomio  $f_d(x, y, z) \cdot w + f_{d+1}(x, y, z)$  tiene singularidades aisladas.

Soares y Giblin, en Theorem 3.1 de [S-G], dan una "fórmula de comparación" de los números de Milnor en el punto  $e$  de dos superficies  $V$  y  $V'$  con singularidades aisladas las cuales están relacionadas del siguiente modo:

$$V = \{(x : y : z : w) \in \mathbb{P}^3 : f_d(x, y, z) \cdot w + f_{d+1}(x, y, z) = 0\},$$

$$V' = \{(x : y : z : w) \in \mathbb{P}^3 : f_d(x, y, z) \cdot w + g_{d+1}(x, y, z) = 0\}.$$

Ambas tienen el mismo cono tangente,  $D$ , en el punto  $e$ . Denotemos por  $T' := \mathcal{Z}(g_{d+1})$ , por  $A := Sing(D) \cap T$  y por  $A' := Sing(D) \cap T'$ . Se tiene la siguiente *fórmula de comparación*, [S-G] Theorem 3.1.

### 3.3.1. Teorema. [S-G].

$$\mu(V', e) - \mu(V, e) = \sum_{a' \in A'} ((D, T')_{a'} - 1) - \sum_{a \in A} ((D, T)_a - 1).$$

Con este resultado se puede dar una fórmula para calcular el número de Milnor de una singularidad de superficie bivalente que tenga  $k = 1$ .

**3.3.2. Teorema.** *Sea  $(V, 0) \subset (\mathbb{C}^3, 0)$  un germen de superficie definido por una ecuación del tipo  $f_d(x, y, z) + f_{d+1}(x, y, z) = 0$ . Supongamos que los conjuntos  $Sing(D)$  y  $Sing(T)$  tienen intersección vacía, entonces el número de Milnor de  $V$  en 0 es*

$$\mu(V, 0) = (d-1)^3 + \mu(D_{red}) + (d-p)(d+p-3) + \sum_{P \in Sing(D) \cap T} ((D, T)_P - 1).$$

**3.3.3. Observación.** Si se sustituye la característica de Euler-Poincaré de la curva  $D_{red}$  por  $\mu(D_{red}) + 3p - p^2$ , la fórmula del teorema es equivalente a la siguiente fórmula

$$\mu(V, 0) = (d-1)^3 + \chi(D) + d^2 - 3d + \sum_{P \in \text{Sing}(D) \cap T} ((D, T)_P - 1).$$

*Demostración:* Sea la descomposición del cono tangente  $D$  en componentes irreducibles, cada una con su multiplicidad,  $D = q_1 C_1 + \dots + q_r C_r$ , sea  $d_i := \deg C_i$  y  $p := d_1 + \dots + d_r$ . Sea  $T' \subset \mathbb{P}^2$  una curva reducida definida por un polinomio homogéneo  $g_{d+1}$  de grado  $d+1$ , de modo que:

- (a) los puntos de  $\text{Sing}(D_{red})$  no sean puntos de la curva  $T'$  y
- (b) la curva  $T'$  corte a cada componente  $C_i$  de  $D$  múltiple, i.e.  $q_i > 1$ , en  $d_i(d+1)$  puntos distintos.

La existencia de  $T'$  está garantizada ya que las anteriores condiciones (a) y (b) son condiciones que definen un abierto (denso) de Zariski del espacio de las curvas planas de grado  $d+1$ .

Sean  $V$  y  $V'$  las siguientes superficies de  $\mathbb{P}^3$ ,

$$V' := \{(x : y : z : w) \in \mathbb{P}^3 : f_d(x, y, z) \cdot w + g_{d+1}(x, y, z) = 0\},$$

$$V = \{(x : y : z : w) \in \mathbb{P}^3 : f_d(x, y, z) \cdot w + f_{d+1}(x, y, z) = 0\}.$$

Ambas superficies tienen sólo singularidades aisladas. En efecto, por un lado se está suponiendo que  $\text{Sing}(D)$  y  $\text{Sing}(T)$  tienen intersección vacía y por otro, la elección de  $T'$  garantiza que  $\text{Sing}(D)$  y  $\text{Sing}(T')$  no se intersecan. Se puede usar el Teorema 3.5 de Soares y Giblin, para comparar sus números de Milnor en  $(0 : 0 : 0 : 1)$ .

Para la superficie  $V'$ , como  $\text{Sing}(D_{red})$  y  $T'$  no tienen intersección se tiene que

$$\sum_{a' \in \text{Sing}(D) \cap T'} ((D, T')_{a'} - 1) = \sum_{q_i > 1} \sum_{P \in C_i \cap T'} (I_P(C_i^{q_i}, T') - 1).$$

Además, como  $C_i$  y  $T'$  se intersecan de modo transversal, el sumando de la derecha de la anterior igualdad es igual a

$$\sum_{q_i > 1} \sum_{P \in C_i \cap T'} (q_i - 1) = \sum_{q_i > 1} p_i (d+1)(q_i - 1) = (d+1)(d-p),$$

Ahora basta aplicar la fórmula de comparación para finalizar la demostración del teorema.  $\square$

**Fórmula de comparación para el caso  $k > 1$ .** Sean las superficies  $V$  de  $\mathbb{P}^3$  definidas como conjunto de ceros de polinomios homogéneos del tipo  $f_d(x, y, z) \cdot w^k + f_{d+k}(x, y, z)$ . Los puntos singulares de una superficie  $V$  de este tipo son los puntos que anulen las siguientes ecuaciones

$$(3.26) \quad \begin{aligned} w^k \text{grad}(f_d) + \text{grad}(f_{d+k}) &= 0 \\ kw^{k-1} f_d &= 0 \end{aligned}$$

donde la primera ecuación son, en realidad tres ecuaciones, ya que se está considerando el vector gradiente  $\text{grad}(h) = (h_x, h_y, h_z)$ .

**3.3.4. Lema.** *La superficie  $V$  tiene singularidades aisladas si y solamente si la curva plana  $T$  es reducida y los conjuntos  $\text{Sing}(D)$  y  $\text{Sing}(T)$  tienen intersección vacía.*

*Demostración:* El hecho de que  $T$  sea una curva reducida es necesario ya que si existe una componente múltiple  $L$  de  $T$ , para todo punto  $P$  de la curva  $L$ , los puntos de la forma  $(P : 0)$  anulan las ecuaciones de (3.26), siendo toda la curva  $L$  singular.

Por otro lado, si existe  $P = (x_0 : y_0 : z_0) \in \text{Sing}(D) \cap \text{Sing}(T)$ , entonces la recta  $L_P$ , definida por los puntos de la forma  $(x_0 : y_0 : z_0 : w)$ , está en  $V$  y anula las ecuaciones de (3.26).

Veamos que las condiciones del lema son suficientes. Evidentemente, el punto  $e = (0 : 0 : 0 : 1)$  es un punto singular de  $V$ . Sea  $a$  otro punto singular de  $V$ . Como  $a$  es distinto de  $e$ , las coordenadas homogéneas  $x, y, z$  de  $a$  no son todas cero, por tanto definen un punto  $P = (x : y : z)$  del plano proyectivo. Así, se puede  $a$  como  $(P : w)$ . Como  $a$  es un punto singular de  $V$  debe anular la última ecuación de (3.26), por lo que debe verificar una de los dos condiciones siguientes (no excluyentes):

- (i) La coordenada de  $w$  es cero. En este caso  $\text{grad}(f_{d+k})(P)$  debe ser cero, por lo que,  $P$  debe ser un punto singular de  $T$ . Como  $T$  es una curva plana reducida sólo tiene un número finito de puntos singulares. Sólo existen pues un número finito de puntos singulares  $a$  de  $V$  con la coordenada  $w$  igual a cero, tantos como puntos singulares tiene la curva plana  $T$ .
- (ii) El punto  $P$  es un punto de  $D$ . En este caso, debido a cómo es la ecuación que define  $V$ , el punto  $P$  debe ser también un punto de  $T$ . Es más, como  $a$  verifica las ecuaciones de (3.26), si  $P$  es un punto singular de la curva  $D$ , entonces  $P$  es un punto singular de la curva  $T$ . Ahora bien, por hipótesis no existen puntos en la intersección de los conjuntos singulares de  $D$  y de  $T$ , por tanto no existe ningún punto singular  $a = (P : w)$  de  $V$  tal que  $P$  sea punto singular de  $D$ .

De este modo, sea  $P$  un punto liso de  $D$ . Si  $P$  es un punto singular de  $T$ , entonces la coordenada  $w$  de  $a$  debe ser cero ya que  $a$  es un punto singular de  $V$  y debe verificar las ecuaciones de (3.26). Estos puntos ya los hemos considerado en (i), donde se ha visto que sólo existen un número finito.

La única posibilidad que queda por tratar es que  $P$  sea un punto liso de  $D$  y sea un punto liso de  $T$ .

Primero veamos que existen un número finito de puntos en la intersección de las curvas proyectivas  $D$  y  $T$ . En efecto, si  $D$  y  $T$  tienen una componente  $C$  en común, la hipótesis de que no existan puntos singulares de ambas curvas en común, nos lleva a la conclusión de que  $D = C$  y de que  $T = C$ , cosa que no es posible ya que el grado de  $D$  es  $d$  y el de  $T$  es  $d + k$ . Por tanto, el Teorema de Bézout garantiza que la intersección de ambas curvas es un número finito de puntos.

El punto singular  $a = (P : w)$  de  $V$  con el que se está tratando tiene como punto  $P$  un punto de la intersección de  $D$  y de  $T$  que es liso para ambas curvas. Veamos que para cada punto  $P$  en estas condiciones existen, a lo más, un conjunto finito de

valores para la coordenada  $w$ , tales que,  $a = (P : w)$  anula las ecuaciones de (3.26). Como la coordenada  $w$  es no nula, basta encontrar, si existe, el único valor  $\lambda \in \mathbb{C}$  no nulo tal que,

$$(3.27) \quad \lambda \cdot \left( \frac{\partial f_d}{\partial x}, \frac{\partial \overline{f_d}}{\partial y}, \frac{\partial f_d}{\partial z} \right) (P) = \left( \frac{\partial f_{d+k}}{\partial x}, \frac{\partial f_{d+k}}{\partial y}, \frac{\partial f_{d+k}}{\partial z} \right) (P).$$

El valor de  $\lambda$  es único ya que para  $P$  fijo se puede pensar en  $\lambda$  como la constante de proporcionalidad entre dos vectores,  $\text{grad}(f_d(P))$  y  $\text{grad}(f_{d+k}(P))$ , que es única. Para este  $\lambda \in \mathbb{C}$  no nulo, existen, exactamente,  $k$  valores distintos de  $w$ , uno por cada raíz  $k$ -ésima de  $\lambda$ , tales que,  $a = (P : w)$  anula las ecuaciones de (3.26).

La demostración de que  $V$  tiene singularidades aisladas finaliza aquí, ya que, para cada punto  $P$  en la intersección de  $D$  y de  $T$ , existen, a lo más,  $k$  puntos singulares distintos de  $V$ .  $\square$

**Caracterización de los puntos singulares de  $V$ .** Se quiere dar una caracterización de los posibles puntos  $P$  de  $V$  que verifiquen la condición (3.27) anterior. Se sabe que son puntos  $P$  de la intersección de  $D$  y de  $T$  y que son lisos para ambas curvas. ¿Para qué puntos  $P$  de  $V$  de este tipo se puede asegurar que existe el  $\lambda$  anterior? La respuesta es:

**3.3.5. Lema.**  *$\lambda$  existe si y sólo si  $D$  y  $T$  tienen la misma recta tangente en  $P$ .*

*Demostración:* Mediante un cambio de coordenadas homogéneo, se puede suponer que las coordenadas de  $P$  son  $(0 : 0 : 1)$ , y las de  $a$  son  $(0 : 0 : 1 : w_0)$ , con  $w_0$  no nulo. Una ecuación afín de  $V$  en el abierto  $U = \mathbb{P}^3 \setminus \{z = 0\}$  es

$$f_d(x, y, 1)w^k + f_{d+k}(x, y, 1) = 0.$$

El punto  $P$  es liso para  $D$ , por lo que  $f_d(x, y, 1) = \alpha x + \beta y + h(x, y)$ , donde  $h(x, y)$  es la suma de los monomios de  $f_d$  de grado mayor ó igual que dos.

El punto  $P$  también es liso para  $T$ , igualmente,  $f_{d+k}(x, y, 1) = \gamma x + \delta y + g(x, y)$ , donde  $g(x, y)$  es la suma de los monomios de  $f_{d+k}$  de grado mayor ó igual que dos.

De este modo, la ecuación afín de  $V$  en  $a$  es

$$H(x, y, w) := (\alpha x + \beta y + h(x, y))w^k + \gamma x + \delta y + g(x, y) = 0.$$

El punto  $a = (0, 0, w)$  es un punto singular de  $V$  si y sólo si el jacobiano de  $H$  se anula en  $(0, 0, w)$ . La derivada parcial de  $F$  respecto de  $w$  siempre se anula ya que  $P$  es un punto de  $D$ . Basta pues con que se anulen las otras dos derivadas parciales:

$$0 = \frac{\partial H}{\partial x}(0, 0, w) = \alpha w^k + \gamma$$

$$0 = \frac{\partial H}{\partial y}(0, 0, w) = \beta w^k + \delta$$

Estas igualdades son equivalentes a que

$$w^k = \frac{-\gamma}{\alpha} = \frac{-\delta}{\beta} \text{ si y sólo si } (\alpha : \beta) = (-\gamma : -\delta).$$

Por último,  $(\alpha : \beta) = (-\gamma : -\delta)$  si y sólo si las curvas  $D$  y  $T$  tienen la misma tangente en el punto  $P$ .  $\square$

Con el lema anterior se ha demostrado la siguiente afirmación:

Los puntos singulares de  $V$  son:

1. El punto  $e = (0 : 0 : 0 : 1)$ ,
2. Los puntos  $(x_0 : y_0 : z_0 : 0)$ , donde  $P_0 = (x_0 : y_0 : z_0) \in \text{Sing}(T)$ .
3. Para cada  $Q = (x_0 : y_0 : z_0)$  que sea punto liso de  $D$ , punto liso de  $T$  y tal que  $(D, T)_Q > 1$ , se tienen  $k$  puntos singulares de  $V$ . Cada uno de ellos es de la forma  $(Q : w_0)$ , donde  $w_0$  es una raíz  $k$ -ésima del único número  $\lambda \in \mathbb{C}$ , no nulo, que verifica la siguiente relación

$$\lambda \text{grad}(f_d)(Q) + \text{grad}(f_{d+k})(Q) = 0.$$

En los tres lemas siguientes se calculan los números de Milnor de  $V$  en todos los puntos singulares excepto en el punto  $e$ .

**3.3.6. Lema.** *Para cada  $P = (x : y : z) \in \text{Sing}(T)$  y  $P \notin D$ , el número de Milnor de  $V$  en  $\bar{P} := (x : y : z : 0)$  es igual a*

$$\mu(V, \bar{P}) = (k - 1)\mu(T, P).$$

*Demostración:* Sea  $P = (x : y : z) \in \text{Sing}(T)$  y  $P \notin D$ . Se eligen coordenadas proyectivas en  $\mathbb{P}^2$  de modo que  $P = (0 : 0 : 1)$ . De este modo una ecuación afín de  $V$  en  $\bar{P}$  es

$$f_d(x, y, 1)w^k + f_{d+k}(x, y, 1) = 0.$$

Para calcular el número de Milnor de  $V$  en  $\bar{P}$  basta estudiar la ecuación que define  $V$  en el anillo de series convergentes centradas en el punto  $\bar{P}$ . En esta carta afín, el punto  $\bar{P}$  tiene coordenadas  $(0, 0, 0)$ . El anillo de series convergentes que buscamos es  $\mathbb{C}\{x, y, w\}$ . En este anillo, el polinomio  $f_d(x, y, 1)$  es una unidad ya que  $P$  no es un punto de  $D$  y por tanto  $f_d(0, 0, 1) \neq 0$ . De hecho,  $f_d$  es una unidad del anillo de series  $\mathbb{C}\{x, y\}$ . Sea  $u(x, y) \in \mathbb{C}\{x, y\}$  el elemento inverso de  $f_d(x, y, 1)$ . La ecuación del germen de  $V$  en  $\bar{P}$  es de la forma

$$w^k + f_{d+k}(x, y, 1)u(x, y) = 0.$$

Por tanto el número de Milnor de  $V$  en  $\bar{P}$  es

$$\mu(V, \bar{P}) = (k - 1)\mu(T, P).$$

$\square$

**3.3.7. Lema.** Para cada  $P = (x : y : z) \in D \cap \text{Sing}(T)$ , el número de Milnor de  $V$  en  $\bar{P} := (x : y : z : 0)$  es igual a

$$\mu(V, \bar{P}) = (k-1)\mu(T, P) + k((D, T)_P - 1).$$

*Demostración:* Sea  $P = (x : y : z)$  un punto liso de la curva  $D$  y singular de la curva  $T$ . De nuevo se pueden elegir coordenadas proyectivas tales que  $P = (0 : 0 : 1)$ . Así, la ecuación afín de  $V$  en el abierto  $U = \mathbb{P}^3 \setminus \{z = 0\}$  es

$$f_d(x, y, 1)w^k + f_{d+k}(x, y, 1) = 0.$$

El punto  $\bar{P}$  tiene coordenadas afines  $(0, 0, 0)$ . Para calcular el número de Milnor de  $V$  en  $\bar{P}$  se busca una función analítica adecuada que defina el germen de  $V$  en  $\bar{P}$ . Como la curva plana  $D$  es lisa en  $P$ , existe un cambio analítico de coordenadas  $h_1 : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$ ,  $h_1(\bar{x}, \bar{y}) = (x, y)$ , tal que  $f_d(h_1(\bar{x}, \bar{y}), 1) = \bar{x}$ .

Sea  $\rho(\bar{x}, \bar{y}) := f_{d+k}(h_1(\bar{x}, \bar{y}), 1)$  y sea  $s > 1$  la multiplicidad de intersección de  $D$  y  $T$  en  $P$ , i.e.  $s = (D, T)_P$ . Así,  $\rho(0, \bar{y}) = c \cdot \bar{y}^s + \dots$  términos de mayor grado,  $c \in \mathbb{C} - \{0\}$ . Por el teorema de Preparación de Weierstrass

$$\rho(\bar{x}, \bar{y}) = v(\bar{x}, \bar{y}) \cdot (\bar{y}^s + \bar{x}b_1(\bar{x})\bar{y}^{s-1} + \dots + \bar{x}b_{s-1}(\bar{x})\bar{y} + \bar{x}b_s(\bar{x})),$$

donde  $v(0, 0) \neq 0$  y  $b_s(0) = 0$ , ya que  $P \in \text{Sing}(T)$ .

Como  $v(\bar{x}, \bar{y})$  es una unidad en  $\mathbb{C}\{\bar{x}, \bar{y}\}$ , sea  $u(\bar{x}, \bar{y})$  una raíz  $s$ -ésima de  $v(\bar{x}, \bar{y})$ . Se puede realizar un nuevo cambio analítico de coordenadas  $h_2 : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$ ,  $h_2(\bar{x}_1, \bar{y}_1) = (\bar{x}, \bar{y})$  que es el inverso del siguiente cambio analítico de coordenadas

$$\begin{aligned}\bar{x}_1 &= \bar{x} \\ \bar{y}_1 &= \bar{y}u(\bar{x}, \bar{y})\end{aligned}$$

de modo que  $f_d(h_1 \circ h_2(\bar{x}_1, \bar{y}_1), 1) = \bar{x}_1$ , y

$$\tilde{\rho}(\bar{x}_1, \bar{y}_1) := \rho \circ h_2(\bar{x}_1, \bar{y}_1) = f_{d+k}(h_1 \circ h_2(\bar{x}_1, \bar{y}_1), 1) = \bar{y}_1^s + \bar{x}_1 g(\bar{x}_1, \bar{y}_1),$$

y  $g(0, 0) = 0$ , ya que  $P \in \text{Sing}(T)$ .

Sea el cambio analítico de coordenadas  $h : (\mathbb{C}^3, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^3, 0)$ ,  $(\bar{x}_1, \bar{y}_2, \bar{w}) \rightarrow (x, y, z)$ , definido como

$$h(\bar{x}_1, \bar{y}_2, \bar{w}) = (h_1 \circ h_2(\bar{x}_1, \bar{y}_1), \bar{w}).$$

Como sólo se han hecho cambios analíticos  $\tilde{P}$  sigue siendo el  $(0, 0, 0)$  y la ecuación del germen  $\tilde{V}$  en un entorno de este punto es

$$p(\bar{x}_1, \bar{y}_1, \bar{w}) := (f \circ h)(\bar{x}_1, \bar{y}_1, \bar{w}) = \bar{x}_1 \bar{w}^k + \bar{y}_1^s + \bar{x}_1 g(\bar{x}_1, \bar{y}_1) = 0,$$

donde  $\tilde{\rho}(\bar{x}_1, \bar{y}_1) = \bar{y}_1^s + \bar{x}_1 g(\bar{x}_1, \bar{y}_1)$  es una función analítica cuyo conjunto de ceros define el germen de curva  $T$  en  $P$ , por tanto  $g(0, 0) = 0$ .

Para no complicar la escritura, a partir de ahora se escribirán las coordenadas  $(\bar{x}_1, \bar{y}_1, \bar{w})$  como  $(x, y, w)$ .

Para calcular el número de Milnor de  $V$  en  $\bar{P}$  hay que calcular la dimensión, como  $\mathbb{C}$ -espacio vectorial, de  $\frac{\mathbb{C}\{x, y, w\}}{(\bar{p}_x, \bar{p}_y, \bar{p}_w)}$ . Las derivadas parciales de  $p(x, y, w)$  son:

$$\begin{aligned} p_x(x, y, w) &= w^k + g(x, y) + xg_x(x, y), \\ p_y(x, y, w) &= xg_y(x, y) + sy^{s-1}, \\ p_w(x, y, w) &= kxw^{k-1}, \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\mu(V, \bar{P}) = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathbb{C}\{x, y, w\}}{(w^k + g(x, y) + xg_x(x, y), xg_y(x, y) + sy^{s-1}, xw^{k-1})}.$$

Por tanto, el número de Milnor es la suma de las dimensiones como  $\mathbb{C}$ -espacios vectoriales de

$$\begin{aligned} &\dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathbb{C}\{x, y, w\}}{(w^k + g(x, y) + xg_x(x, y), xg_y(x, y) + sy^{s-1}, x)} \\ &+ \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathbb{C}\{x, y, w\}}{(w^k + g(x, y) + xg_x(x, y), xg_y(x, y) + sy^{s-1}, w^{k-1})}. \end{aligned}$$

El primer  $\mathbb{C}$ -espacio vectorial tiene la misma dimensión que

$$\dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathbb{C}\{y, w\}}{(w^k + g(0, y), y^{s-1})},$$

y como  $g(x, y)$  es un germen no unidad en  $\mathbb{C}\{y, w\}$ , la dimensión de este  $\mathbb{C}$ -espacio vectorial es  $k(s-1)$ .

Por otro lado, el segundo  $\mathbb{C}$ -espacio vectorial tiene como dimensión

$$(k-1) \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathbb{C}\{x, y\}}{(g(x, y) + xg_x(x, y), xg_y(x, y) + sy^{s-1})}.$$

Para finalizar, basta observar que las funciones analíticas que definen el cociente anterior son, precisamente,  $\tilde{\rho}_x$  y  $\tilde{\rho}_y$ . Por tanto, esta última dimensión es igual a  $(k-1)\mu(T, P)$ .  $\square$

**3.3.8. Lema.** *Para cada  $P = (x : y : z) \in D \cap T$ , tal que  $P$  es un punto liso de ambas curvas y tal que  $(D, T)_P > 1$ , el número de Milnor de  $V$  en  $\bar{P}^i := (x : y : z : w_i)$  es igual a*

$$\mu(V, \bar{P}^i) = (D, T)_P - 1,$$

donde  $w_i$  cumple la igualdad  $w_i^k \text{grad}(f_d)(P) + \text{grad}(f_{d+k})(P) = 0$ .

*Demostración:* Sea  $P$  un punto del plano proyectivo que se encuentre en las hipótesis del lema. Se eligen otra vez coordenadas proyectivas de modo que  $P = (0 : 0 : 1)$ .

El punto  $\bar{P}^i$ , singular de  $V$ , tiene coordenadas homogéneas  $\bar{P}^i := (0 : 0 : 1 : w_i)$ , donde  $w_i^k \neq 0$ . Así la ecuación afín de  $V$  en el abierto  $\mathbb{P}^3 \setminus \{z = 0\}$  es

$$f_d(x, y, 1)w^k + f_{d+k}(x, y, 1) = 0.$$

Las coordenadas de  $\bar{P}^i$  en este abierto afín son  $(0, 0, w_i)$ . Para calcular el número de Milnor de  $V$  en  $\bar{P}^i$  hay que trabajar en el anillo de series convergentes  $\mathbb{C}\{x, y, w - w_i\}$ .

Como la curva plana  $D$  es lisa en  $P$ , existe un cambio analítico de coordenadas  $(\bar{x}, \bar{y})$  a coordenadas  $(x, y)$ ,  $h_1 : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$ , de modo que  $f_d(h_1(\bar{x}, \bar{y}), 1) = \bar{x}$ . Sea  $\rho(\bar{x}, \bar{y}) := f_{d+k}(h_1(\bar{x}, \bar{y}), 1)$  y sea  $s > 1$  la multiplicidad de intersección de  $D$  y  $T$  en  $P$ . Por tanto,  $\rho(0, \bar{y}) = c \cdot \bar{y}^s + \dots$  términos de mayor grado,  $c \in \mathbb{C} - \{0\}$ . Por el teorema de Preparación de Weierstrass

$$\rho(\bar{x}, \bar{y}) = v(\bar{x}, \bar{y}) \cdot (\bar{y}^s + \bar{x}b_1(\bar{x})\bar{y}^{s-1} + \dots + \bar{x}b_{s-1}(\bar{x})\bar{y} + \bar{x}b_s(\bar{x})),$$

donde  $v(0, 0) \neq 0$ . Sea el cambio analítico de coordenadas  $h : (\mathbb{C}^3, (0, 0, w_0)) \rightarrow (\mathbb{C}^3, (0, 0, w_0))$ , definido como  $h(\bar{x}, \bar{y}, \bar{w}) = (h_1(\bar{x}, \bar{y}), \bar{w})$ .

Sea  $p$  la función analítica  $f \circ h$ , i.e.

$$p(\bar{x}, \bar{y}, \bar{w}) := (f \circ h)(\bar{x}, \bar{y}, \bar{w}) = \bar{x}w^k + \rho(\bar{x}, \bar{y}).$$

Otro modo de escribir  $p$  es

$$p = v(\bar{x}, \bar{y})\bar{y}^s + \bar{x} \left( w^k + v(\bar{x}, \bar{y}) \left( b_1(\bar{x})\bar{y}^{s-1} + \dots + b_{s-1}(\bar{x})\bar{y} + b_s(\bar{x}) \right) \right).$$

Como  $\bar{P}^i$  es un punto singular del germen  $V$ , las derivadas parciales de  $p$  se deben anular en  $(0, 0, w_i)$ . Así,

$$p_{\bar{x}}(0, 0, w_i) = v(0, 0)b_s(0) + w_i^k,$$

debe de ser cero. Por tanto  $v(0, 0)b_s(0) = -w_i^k$ .

A partir de ahora se escriben las coordenadas  $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{w})$  como  $(x, y, w)$ .

Para calcular el número de Milnor se debe calcular el desarrollo en serie de potencias de  $p$  en el punto  $(0, 0, w_i)$  :

$$p(x, y, w) = \rho(x, y) + x \left( w_i^k + \sum_{j=1}^k \frac{k(k-1) \dots (k-j+1) \cdot w_j^{k-j}}{j!} (w - w_i)^j \right).$$

Se hace el cambio de variable  $\bar{x} = x, \bar{y} = y, \bar{w} = w - w_i$  para trabajar en el anillo de series  $\mathbb{C}\{\bar{x}, \bar{y}, \bar{w}\}$ . Ahora  $\bar{P}^i$  tiene coordenadas  $(0, 0, 0)$  y el germen de  $V$  en  $\bar{P}^i$  está dado como los ceros de la función analítica  $\bar{p}$  definida

$$\begin{aligned} \bar{p}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{w}) &= \rho(\bar{x}, \bar{y}) + \bar{x} \left( w_i^k + \sum_{j=1}^k \frac{k(k-1) \dots (k-j+1) \cdot w_i^{k-j}}{j!} \bar{w}^j \right) \\ &= \rho(\bar{x}, \bar{y}) + \bar{x} \left( w_i^k + \bar{w} \sum_{j=1}^k \frac{k(k-1) \dots (k-j+1) \cdot w_j^{k-j}}{j!} \bar{w}^{j-1} \right), \end{aligned}$$



Por hipótesis,  $w_i$  es distinto de 0, por tanto  $kw_i^{k-1}$  también es distinto de cero. Entonces, en el anillo de series de potencias  $\mathbb{C}\{\bar{w}\}$ , la serie

$$\sum_{j=1}^k \frac{k(k-1)\dots(k-j+1) \cdot w_j^{k-j}}{j!} \bar{w}^{j-1}$$

es una unidad. Se puede hacer de nuevo el cambio de variable siguiente

$$\begin{aligned} \bar{x}_1 &= \bar{x}, \\ \bar{y}_1 &= \bar{y}, \\ \bar{w}_1 &= \bar{w} \left( \sum_{j=1}^k \frac{k(k-1)\dots(k-j+1) \cdot w_j^{k-j}}{j!} \bar{w}^{j-1} \right), \end{aligned}$$

con lo que la ecuación que define al germen  $(V, P^i)$  es de la forma

$$\bar{p}_1(\bar{x}_1, \bar{y}_1, \bar{w}_1) = \rho(\bar{x}_1, \bar{y}_1) + \bar{x}(w_i^k + \bar{w}_1)$$

Otro modo de escribir  $\bar{p}_1(\bar{x}_1, \bar{y}_1, \bar{w}_1)$  es

$$\bar{x}_1 \left( w_i^k + \bar{w}_1 + v(\bar{x}_1, \bar{y}_1) \left( b_1(\bar{x}_1) \bar{y}_1^{s-1} + \dots + b_{s-1}(\bar{x}_1) \bar{y}_1 + b_s(\bar{x}_1) \right) \right) + v(\bar{x}_1, \bar{y}_1) \bar{y}_1^s.$$

Se ha observado con anterioridad que  $v(0, 0)b_s(0) + w_i^k = 0$ . Esto asegura que las siguientes ecuaciones definen un último cambio analítico de variable:

$$\begin{aligned} \bar{x}_2 &= \bar{x}_1, \\ \bar{y}_2 &= \bar{y}_1, \\ \bar{w}_2 &= \bar{w}_1 + v(\bar{x}_1, \bar{y}_1) \left( b_1(\bar{x}_1) \bar{y}_1^{s-1} + \dots + b_{s-1}(\bar{x}_1) \bar{y}_1 + b_s(\bar{x}_1) \right). \end{aligned}$$

Al realizar este cambio analítico de coordenadas la ecuación del germen de  $V$  en  $\bar{P}^i$  es

$$x_2 w_2 + v(x_2, y_2) y_2^s = 0,$$

y, por tanto, el número de Milnor de  $V$  en  $\bar{P}^i$  es  $(s-1)$ . □

Con estos lemas previos se ha calculado el número de Milnor en cada punto singular de  $V$ , excepto en el punto  $e = (0 : 0 : 0 : 1)$ . Para calcularlo en este punto se necesita una fórmula de comparación similar a la del caso  $k = 1$ .

Sean los siguientes conjuntos de  $\mathbb{P}^2$

$$A = \text{Sing}(D) \cap T,$$

$$B = D \cap \text{Sing}(T),$$

$$C = \{c \in \mathbb{P}^2 : c \in \text{Sing}(T) \text{ y } c \notin D\},$$

$$M = \{m \in \mathbb{P}^2 : m \text{ es punto liso de } D \text{ y punto liso de } T\},$$

$$M_1 = \{m \in M : (D, T)_m > 1\},$$

$$M_2 = \{m \in M : (D, T)_m = 1\},$$

Evidentemente  $M$  es unión disjunta de  $M_1$  y de  $M_2$ . Obsérvese también que los puntos de  $B$  son puntos lisos de  $D$ . Viendo la relación que existe entre los puntos singulares de  $V$  y los puntos de  $D$  y de  $T$  se tiene que

$$\#(\text{Sing}(V)) = 1 + \#(B) + \#(C) + k \cdot \#(M_1)$$

Sea  $V' \in \mathbb{P}^3$  otra superficie de  $\mathbb{P}^3$  definida como conjunto de ceros de un polinomio homogéneo del tipo  $f_d(x, y, z)w^k + g_{d+k}(x, y, z)$ , de modo que si  $T'$  es la curva plana proyectiva definida por  $g_{d+k}$ , entonces  $T'$  es reducida y los conjuntos  $\text{Sing}(D)$  y  $\text{Sing}(T')$  no se intersecan. Denotaremos por  $A', B', C', M', M'_1$  y  $M'_2$  los conjuntos de  $V'$  análogos a los definidos anteriormente para  $V$ . Entonces se verifica el siguiente teorema

### 3.3.9. Teorema. Fórmula de comparación.

$$\mu(V', e) - \mu(V, e) = k \cdot \left\{ \sum_{a' \in A'} ((D, T')_{a'} - 1) - \sum_{a \in A} ((D, T)_a - 1) \right\}.$$

La demostración será similar a la realizada por Soares y Giblin para el caso  $k = 1$ .

*Demostración:*

**Una buena proyección.** Sea  $\pi : V - \{e\} \rightarrow \mathbb{P}^2$  la proyección desde el punto  $e = (0 : 0 : 0 : 1)$ , es decir,  $\pi(x : y : z : w) = (x : y : z)$ . Se denota por  $D + T$  al divisor de  $\mathbb{P}^2$  formado por las curvas  $D$  y  $T$ .

- (i) Para cada  $P \in \mathbb{P}^2 \setminus (D + T)$ , la imagen inversa mediante  $\pi$  de  $P$  son, exactamente,  $k$  puntos distintos, definidos por la ecuación

$$w^k = \frac{-f_{d+k}(P)}{f_d(P)}.$$

- (ii) Para cada punto  $P$  de la curva plana  $D$  que no esté contenido en la curva  $T$ , no existe imagen inversa mediante  $\pi$ .
- (iii) Para cada punto  $P = (x_0 : y_0 : z_0)$  de la curva  $T$  que no pertenezca a la curva  $D$ , la imagen inversa mediante  $\pi$  de  $P$  es un único punto, el punto  $(x_0 : y_0 : z_0 : 0)$ .
- (iv) Para cada punto  $P = (x_0 : y_0 : z_0)$  que se encuentre en la intersección de ambas curvas, la imagen inversa mediante  $\pi$  de  $P$  es la recta que pasa por  $e$ , parametrizada de la siguiente manera  $(x_0 : y_0 : z_0 : w)$ .

Se define el conjunto  $Q$  como la adherencia de  $\pi^{-1}(D + T)$  en  $V$ . La aplicación restricción  $\pi|_{V \setminus Q} : V - Q \rightarrow \mathbb{P}^2 \setminus (D + T)$  es un recubrimiento cíclico de  $k$  hojas no ramificado, con lo que

$$(3.28) \quad \chi(V - Q) = k \cdot \chi(\mathbb{P}^2 \setminus (D + T)).$$

Sea  $Sing(V) = \{e, p_1, \dots, p_r\}$  el conjunto de puntos singulares de  $V$ . Sea  $\bar{V}$  una superficie lisa de  $\mathbb{P}^3$  de grado  $d+k$  próxima a  $V$ . Quitando entornos cónicos de las singularidades de  $V$  (ver [Milnor]) y sustituyéndolos por sus fibras de Milnor  $F_e, F_{p_i}$  identificadas a lo largo de los bordes  $\partial F_e, \partial F_{p_i}$  obtenemos un espacio homeomorfo a  $\bar{V}$ . Así al calcular la característica de Euler de la homología singular se tiene que

$$(3.29) \quad \chi(\bar{V}) = \chi(V \setminus Sing(V)) + \chi(F_e) - \chi(\partial F_e) + \sum_{i=1}^r \chi(F_{p_i}) - \chi(\partial F_{p_i}).$$

Por un lado, sea  $h$  la característica de Euler de  $\bar{V}$ , todas las superficies lisas de grado  $d+k$  son homeomorfas. Por otro lado, las variedades  $\partial F_e, \partial F_{p_i}$  tienen característica de Euler igual a cero ya que son 3-variedades diferenciables cerradas. Si además se sustituye los valores de los números de Milnor de  $V$  en los puntos singulares, encontrados en los Lemas de 3.3.6, 3.3.7 y 3.3.8, se tiene que

$$(3.30) \quad \begin{aligned} h &= \chi(V \setminus Sing(V)) + \mu(V, e) + 1 + \sum_{b \in B} ((k-1)\mu(T, b) + k((D, T)_b - 1)) + 1 \\ &+ \sum_{c \in C} ((k-1)\mu(T, c) + 1) + k \sum_{m \in M_1} ((D, T)_m - 1 + 1), \end{aligned}$$

Si  $A$  y  $B$  son conjuntos algebraicos complejos proyectivos que verifiquen que  $A \subset B$  se les puede aplicar la dualidad de Lefschetz y la dualidad de Poincaré, ver [Munkres] pág 415-419.

$$H_k(B, A; \mathbb{Z}) \xrightarrow{\text{Lefschetz}} H^{n-k}(|B| - |A|; \mathbb{Z}) \xrightarrow{\text{Poincaré}} H_{n-k}(|B| - |A|; \mathbb{Z}).$$

Se considera la terna de conjuntos algebraicos  $Sing(V) \subset Q \subset V$ , usando las dualidades de Lefschetz y de Poincaré y las sucesiones exactas de homología de los pares  $(V, Sing(V))$  y  $(V, Q)$  se tiene que las características de los pares son:  $\chi(V, Sing(V)) = \chi(|V| - |Sing(V)|)$  y  $\chi(V, Q) = \chi(|V| - |Q|)$ .

También se tiene sucesión exacta larga de homología de la terna  $(V, Q, Sing(V))$ . Por tanto, se verifica la siguiente relación entre las las características de Euler-Poincaré

$$\chi(|V| - |Sing(V)|) = \chi(V, Sing(V)) = \chi(V, Q) + \chi(Q, Sing(V))$$

Usando el resultado de (3.28)

$$\chi(|V| - |Q|) + \chi(Q, Sing(V)) = k\chi(\mathbb{P}^2 \setminus (D + T)) + \chi(Q, Sing(V)).$$

El conjunto  $Q$  está formado por  $\#(A) + \#(B) + \#(M)$  rectas proyectivas que se cortan en el punto  $e$  y por los puntos del conjunto

$$\{P_0 := (x_0 : y_0 : z_0 : 0) \in \mathbb{P}^3 : P_0 \in T \setminus D\}.$$

Obsérvese que las rectas y este conjunto no se intersecan.

Como  $Sing(V)$  es un conjunto finito de puntos, se puede calcular la característica de Euler-Poincaré del par  $\chi(Q, Sing(V))$  sin más que restar a  $\chi(Q)$  el número de puntos singulares de  $V$ , i.e.

$$\begin{aligned}\chi(Q, Sing(V)) &= (\#(A) + \#(B) + \#(M))(\chi(\mathbb{P}^1) - 1) + 1 \\ &+ \chi(T \setminus D) - (1 + \#(B) + \#(C) + k\#(M_1)) \\ &= \#(A) - (k-1)\#(M_1) + \#(M_2) - \#(C) + \chi(T \setminus D),\end{aligned}$$

Por tanto la ecuación (3.30) nos queda

$$\begin{aligned}h - (\mu(V, c) + 1) &= k \cdot \chi(\mathbb{P}^2 \setminus (D + T)) - (k-1)\#(M_1) + \#(M_2) + \#(A) + \chi(T \setminus D) \\ &+ \sum_{b \in B} \{k((D, T)_b - 1) + (k-1)\mu(T, b) + 1\} \\ (3.31) \quad &+ \sum_{c \in C} (k-1)\mu(T, c) + k \sum_{m \in M_1} (D, T)_m,\end{aligned}$$

**Cálculo de  $\chi(\mathbb{P}^2 \setminus (D + T))$ .** Sea  $p$  el grado de  $D_{red}$ , sea  $l$  el grado de  $D + T$ , es decir  $l = p + d + k$ , recordar que  $T$  es una curva reducida. Por tanto,

$$\chi(\mathbb{P}^2 \setminus (D + T)) = 3 - 3l + l^2 - \sum_{P \in Sing(D_{red} + T)} \mu(D_{red} + T, P).$$

Busquemos una expresión más sencilla para esta suma de números de Milnor.

$$\mu(D_{red} + T) = \sum_{P \in Sing(D_{red}) \setminus T} \mu(D_{red}, P) + \sum_{P \in Sing(T) \setminus D_{red}} \mu(T, P) + \sum_{P \in D_{red} \cap T} \mu(D_{red} + T, P).$$

Desarrollemos de un modo más conveniente el último sumatorio del lado derecho de la anterior igualdad. Para ello se llamará  $Reg(D_{red})$ , respectivamente  $Reg(T)$ , a los puntos lisos de  $D_{red}$ , respectivamente de  $T$ . Como  $Sing(D)$  y  $Sing(T)$  no se intersecan entonces

$$\begin{aligned}\sum_{P \in D_{red} \cap T} \mu(D_{red} + T, P) &= \sum_{P \in Sing(D_{red}) \cap Reg(T)} \mu(D_{red} + T, P) \\ &+ \sum_{P \in Reg(D_{red}) \cap Sing(T)} \mu(D_{red} + T, P) \\ &+ \sum_{P \in Reg(D_{red}) \cap Reg(T)} \mu(D_{red} + T, P).\end{aligned}$$

Además, como para dos gérmenes de curvas planas reducidas  $(C, 0)$  y  $(D, 0)$  se tiene que  $\mu(C + D, 0) = \mu(C, 0) + \mu(D, 0) + 2(C, D)_0 - 1$ , entonces

$$\begin{aligned}\sum_{P \in D_{red} \cap T} \mu(D_{red} + T, P) &= \sum_{P \in Sing(D_{red}) \cap T} (\mu(D_{red}, P) + 2(D_{red}, T)_P - 1) \\ &+ \sum_{P \in Reg(D_{red}) \cap Sing(T)} (\mu(T, P) + 2(D_{red}, T)_P - 1) \\ &+ \sum_{P \in Reg(D_{red}) \cap Reg(T) \cap Reg(D)} (2(D_{red}, T)_P - 1) \\ &+ \sum_{P \in Reg(D_{red}) \cap Reg(T) \cap Sing(D)} (2(D_{red}, T)_P - 1).\end{aligned}$$

Finalmente, escribiendo los anteriores sumandos en función de los conjuntos  $A, B$  y  $M$  se tiene

$$\begin{aligned} \sum_{P \in D_{red} \cap T} \mu(D_{red} + T, P) &= \sum_{P \in A} (\mu(D_{red}, P) + 2(D_{red}, T)_P - 1) \\ &\quad + \sum_{P \in B} (\mu(T, P) + 2(D_{red}, T)_P - 1) \\ &\quad + \sum_{P \in M} (2(D_{red}, T)_P - 1), \end{aligned}$$

con lo que la suma de los números de Milnor de la curva  $D_{red} + T$  queda

$$\begin{aligned} \mu(D_{red} + T) &= \sum_{P \in \text{Sing}(D_{red})} \mu(D_{red}, P) + \sum_{P \in \text{Sing}(T)} \mu(T, P) \\ &\quad + 2 \sum_{P \in D_{red} \cap T} (D_{red}, T)_P - (\#(A) + \#(B) + \#(M)). \end{aligned}$$

Como  $D_{red}$  y  $T$  no tienen ninguna componente en común, (vale el mismo argumento que el realizado anteriormente con  $D$  y  $T$ ), el Teorema de Bézout vuelve a calcular la suma de las multiplicidades de intersección de la igualdad anterior, su valor es  $p(d+k)$ . Si se define  $m := 3 - 3l + l^2 - 2p(d+k) - \mu(D_{red})$ , se tiene que la característica que se busca vale

$$(3.32) \quad \chi(\mathbb{P}^2 \setminus (D + T)) = m - \mu(T) + (\#(A) + \#(B) + \#(M)).$$

**Cálculo de  $\chi(T \setminus D)$ .** En este caso es inmediato calcular esta característica. Si se define  $s := 3(d+k) - (d+k)^2$ , y se ve la definición de los conjuntos  $A, B$  y  $M$  se obtiene que

$$(3.33) \quad \chi(T \setminus D) = \chi(T) - \#(D_{red} \cap T) = s + \mu(T) - (\#(A) + \#(B) + \#(M)).$$

Si se sustituye en (3.31) las dos igualdades anteriores, (3.32) y (3.33), se tiene

$$\begin{aligned} h - (\mu(V, e) + 1) &= k \cdot (m - \mu(T) + \#(A) + \#(B) + \#(M_1) + \#(M_2)) \\ &\quad + \#(A) - (k-1)\#(M_1) + \#(M_2) \\ &\quad + s + \mu(T) - (\#(A) + \#(B) + \#(M_1) + \#(M_2)) \\ &\quad + (k-1)\mu(T) - (k-1)\#(B) \\ &\quad + k \left\{ \sum_{b \in B} (D, T)_b + \sum_{m \in M_1} (D, T)_m \right\} \end{aligned}$$

Simplificando

(3.34)

$$h - (\mu(V, e) + 1) = km + s + k\#(A) + k\#(M_2) + k \left\{ \sum_{b \in B} (D, T)_b + \sum_{m \in M_1} (D, T)_m \right\}$$

Si se usa el teorema de Bézout entre las curvas  $D$  y  $T$  se tiene la igualdad

$$d(d+k) = \sum_{P \in D \cap T} (D, T)_P = \sum_{a \in A} (D, T)_a + \sum_{b \in B} (D, T)_b + \sum_{m \in M_1} (D, T)_m + \sum_{m \in M_2} (D, T)_m.$$

Ahora, como los puntos de  $M_2$  son aquellos donde la multiplicidad de intersección entre las curvas  $D$  y  $T$  vale 1, el último sumando es exactamente el  $\#(M_2)$ . Así,

$$d(d+k) - \sum_{a \in A} (D, T)_a = \sum_{b \in B} (D, T)_b + \sum_{m \in M_1} (D, T)_m + \#(M_2).$$

Y sustituyendo este resultado en (3.34) se obtiene que

$$(3.35) \quad h - (\mu(V, e) + 1) = k(m + d(d+k)) + s - k \sum_{a \in A} ((D, T)_a - 1).$$

Para la otra superficie  $V'$  del enunciado del teorema se tiene la misma igualdad de (3.35). Además, tal y como está definida  $V'$ , se tiene que  $D$  es el mismo, el grado de  $T'$  es el mismo que el de  $T$ , y  $h'$ ,  $s'$  y  $m'$  coinciden con  $h$ ,  $s$  y  $m$ . Para finalizar la demostración del teorema sólo tenemos que restar las expresiones (3.35) de  $V$  y de  $V'$ .  $\square$

Ya se puede dar una fórmula para calcular el número de Milnor de  $V$  en  $c$ . En el enunciado del siguiente teorema se están suponiendo las notaciones que se vienen usando.

**3.3.10. Teorema.** *Sea  $(V, 0) \subset (\mathbb{C}^3, 0)$  un germen de superficie bivalente definido por una ecuación del tipo  $f_d(x, y, z) + f_{d+k}(x, y, z) = 0$ . Supongamos que los conjuntos proyectivos  $Sing(D)$  y  $Sing(T)$  tienen intersección vacía, entonces el número de Milnor de  $V$  en 0 es*

$$\mu(V, 0) = (d-1)^3 + k \left\{ \mu(D_{red}) + (d-p)(d+p-3) + \sum_{P \in Sing(D) \cap T} ((D, T)_P - 1) \right\}.$$

*O equivalentemente:*

$$\mu(V, 0) = (d-1)^3 + k \left\{ \chi(D) + d^2 - 3d + \sum_{P \in Sing(D) \cap T} ((D, T)_P - 1) \right\}.$$

*Demostración:* Sea la descomposición del cono tangente en componentes irreducibles, cada una con su multiplicidad,  $D = q_1 C_1 + \dots + q_r C_r$ . Sea  $d_i$  el grado de  $C_i$ .

Si  $D$  es una curva plana reducida la fórmula del teorema ya se ha demostrado en el Teorema de 2.4.6 del capítulo anterior.

Supongamos que  $D$  no es reducido. La hipótesis de que los conjuntos  $Sing(D)$  y  $Sing(T)$  tengan intersección vacía hace necesario que  $T$  sea una curva plana reducida. Se elige otra curva reducida  $T' \subset \mathbb{P}^2$  definida por un polinomio homogéneo  $g_{d+k}$  de grado  $d+k$ , de modo que ningún punto de  $Sing(D_{red})$  esté contenido en la curva  $T'$  y tal que  $T'$  corte a cada componente  $C_i$ , que tenga  $q_i > 1$ , en  $d_i(d+k)$  puntos distintos.

La existencia de  $T'$  está garantizada ya que las anteriores condiciones son condiciones que definen un abierto (denso) de Zariski del espacio de las curvas planas de grado  $d+k$ .

Sean las superficies de  $\mathbb{P}^3$

$$V' := \{(x : y : z : w) \in \mathbb{P}^3 : f_d(x, y, z) \cdot w^k + g_{d+k}(x, y, z) = 0\}.$$

$$V = \{(x : y : z : w) \in \mathbb{P}^3 : f_d(x, y, z) \cdot w^k + f_{d+k}(x, y, z) = 0\},$$

Ambas cumplen las condiciones del teorema anterior, por lo que se pueden comparar sus números de Milnor en  $(0 : 0 : 0 : 1)$ . Para la superficie  $V'$  se tiene

$$\sum_{a' \in \text{Sing}(D) \cap T'} ((D, T')_{a'} - 1) = \sum_{q_i > 1} \sum_{P \in C_i \cap T'} \{(C_i^{q_i}, T')_P - 1\}$$

ya que  $\text{Sing}(D_{red})$  y  $T'$  no tienen intersección. Además, como  $C_i$  y  $T'$  tienen intersección transversal, la última igualdad es equivalente a

$$\sum_{q_i > 1} \sum_{P \in C_i \cap T'} (q_i - 1) = \sum_{q_i > 1} p_i(d + k)(q_i - 1) = (d + k)(d - p),$$

donde  $p$  es el grado del cono tangente reducido, es decir  $p = d_1 + \dots + d_r$ . Ahora basta aplicar la fórmula de comparación para finalizar la demostración del teorema.  $\square$

# Bibliografía

- [A'Campo] **N. A'Campo**, La fonction zeta d'une monodromie, *Commentarii Mathematici Helvetici* 50 (1975) 233-248.
- [Artal] **E. Artal**, *Forme de Jordan de la Monodromie des Singularités Superisolées de Surfaces*, Memoirs of the A.M.S., vol. 109, 525, 1994.
- [B-W-K] **T. Becker, V. Weispfenning, H. Kredel**, Gröbner Bases: A Computational Approach to Commutative Algebra, *Graduate Texts in Mathematics*, 141, Springer, Berlin, (1991)
- [B-S 1] **J. Briançon, J.P. Speder**, Familles équisingulières de surfaces à singularité isolée, *C.R. Acad. Sci. Paris*, 280, Série I, (1975) 10133-1016.
- [B-S 2] **J. Briançon, J.P. Speder**, Les conditions de Whitney impliquent  $\mu^*$ -constant, *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 26 (1976), 153-163.
- [Brieskorn] **E. Brieskorn**, Die monodromie der isolierten singularitäten von hyperflächen, *manuscripta math.* 2, (1970), 103-161.
- [B-K] **E. Brieskorn, H. Knörrer**, *Plane algebraic curves*, Birkhäuser, Basel-Stuttgart, 1986.
- [B-G] **R.O. Buchweitz, G.M. Greuel**, Milnor Number and Deformation of Complex Curve Singularities,, *Inventiones math.* 58, (1980), 241-281.
- [B-V] **D. Burghlea, A. Verona**, Local homological properties of analytic sets, *manuscripta math.* 7, (1972), 55-66.
- [Campillo] **A. Campillo**, *Algebroid Curves in Positive Characteristic*, Lecture Notes in Math., vol. 813, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1980.
- [Dimca] **A. Dimca**, *Singularities and Topology of Hypersurfaces*, Springer-Verlag, New York, 1992.
- [DB-M] **P. Du Bois, F. Michel**, The integral Seifert form does not determine the topology of plane curve germs, *J. Algebraic Geometry*, 3, No. 1, (1994), 1-38.
- [E-N] **D. Eisenbud, W. Neumann**, *Three dimensional link theory and invariants of plane curve singularities*, Ann. of Math. Studies, No. 110, Princeton Univ. Press, Princeton, New Jersey, 1985.
- [Ephraim] **R. Ephraim**,  $C^1$ -preservation of multiplicity, *Duke Math. J.*, 43, (1976),



797-803.

- [Fulton] **W. Fulton**, *Intersection Theory*, A Series of modern Surveys in Math. 2, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1984.
- [G] **C.G. Gibson et al.**, *Topological stability of smooth mappings*, Lecture Notes in Math., vol. 552, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1976.
- [Girál] **J. M. Girál**, Anillos Locales Regulares. Teoría del Grado. Anillos de Cohen-Macaulay, *Notas del Seminario de Algebra Conmutativa y Geometría Algebraica*, 1, Univ. Barcelona.
- [Greuel] **G.M. Greuel**, Constant Milnor number implies constant multiplicity for quasihomogeneous singularities, *manuscripta math.* 56, (1986), 159-166.
- [G-R] **H. Grauert, R. Remmert**, *Coherent Analytic Sheaves*, A Series of Comprehensive Studies in Mathematics, vol. 265, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1984.
- [G-H] **P. Griffiths, J. Harris**, *Principles of algebraic geometry*, Wiley, New York, 1976.
- [Hamm] **H. Hamm**, Lokale topologische Eigenschaften komplexer Räume, *Math. Ann.* 191 (1971) 235-252.
- [Hartshorne] **R. Hartshorne**, *Algebraic geometry*, Graduate Text in Math. 52, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1977.
- [H-I-O] **M. Hermann, S. Ikeda, U. Orbanz**, *Equimultiplicity and Blowing up*, Springer-Verlag, Berlin, 1988.
- [H-M] **J.P. Henry, M. Merle**, Sectiones planes, limites d'espaces tangents et transversalité de variétés polaires, *C.R. Acad. Sci. Paris*, t. 291 Serie A, (1980), 291-294.
- [K-K] **L. Kaup, B. Kaup**, *Holomorphic Functions of Several Variables*, De Gruyter studies in mathematics 3, De Gruyter, Berlin 1983.
- [Kunz] **E. Kunz**, *Introduction to Commutative Algebra and Algebraic Geometry*, Birkhäuser, Boston, 1985.
- [Laufer] **H.B. Laufer**, On  $\mu$  for surface singularities, *Several Complex Variables*, Proc. of Symp. Pure Math. vol. 30,1 (1975), 45-49.
- [Lê 1] **L.D. Tráng**, Une application d'un théorème d'A'Campo á l'équisingularité, *Indagationes Mathematicae*, 35,5, (1973), 403-409.
- [Lê 2] **L.D. Tráng**, Some remarks on relative monodromy, *Real and Complex Singularities* (Proc. Nordic Summer School, Oslo 1976), Sijthoff and Noordhoff, 1977, 397-403.
- [Lê 3] **L.D. Tráng**, Ensembles Analytiques Complexes avec Lieu Singulier de Di-

- mension Un (d'après Iomdine), *Seminaire sur les Singularites*, Publications Mathematiques de l'Universite Paris VII, 1980, 87-95.
- [L-R] **L.D. Tráng, C.P. Ramanujam** The invariance of Milnor's number implies the invariance of the topological type, *Am. J. Math.*, 98, 1976, 67-78.
- [L-T] **L.D. Tráng, B. Teissier**, Cycles évanescents, sections planes et conditions de Whitney II, *Proc. Symp. Pure Math.* 40, (1983) 65-103.
- [L] **S. Lojasiewicz**, Triangulation of semianalityc sets, *Ann. Sci. Norm. Super.*, Pisa Cl. Sci., IV. Ser. 18, (1964), 449-474.
- [Luengo] **I. Luengo**, The  $\mu$ -constant stratum is not smooth, *Inventiones mathematicae*, 90 (1987) 139-152.
- [L-M] **I. Luengo, A. Melle**, A formula for the Milnor number, *C.R. Acad. Sci. Paris*, 321, Série I, (1995) 1473-1478.
- [Mather] **J. Mather**, Stability of  $C^\infty$ -Mappings III, Finitely Determined Map-Germs, *Publ. Math. I.H.E.S.* 35 (1968), 127-156.
- [Matsumura] **H. Matsumura**, *Commutative Algebra*, Second Edition, Benjamin, New York, 1980.
- [Merle] **M. Merle**, Invariants polaires des courbes planes, *Inventiones mathematicae*, 41 (1977) 103-11.
- [Milnor] **J. Milnor**, *Singular points of complex hypersurfaces*, Ann. of Math. Studies, No. 61, Princeton Univ. Press, Princeton, New Jersey, (1968).
- [Munkres] **J.R. Munkres**, *Elements of Algebraic Topology*, Addison-Wesley Pub. Company, 1984.
- [Neumann] **W. Neumann**, A calculus for plumbing applied to the topology of complex surface singularities and degenerating complex curves, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 268, (1981), 299-344.
- [Oka] **M. Oka**, On the weak simultaneous resolution of a negligible truncation of the Newton boundary, *Contem. Math.*, 90, (1989), 199-210.
- [Orlik] **P. Orlik**, The multiplicity of a holomorphic map at an isolated critical point, *Real and complex singularities, Oslo 1976*, (1977), 405-474.
- [O'Shea] **D. O'Shea**, Topologically trivial deformations of isolated quasihomogeneous hypersurface singularities are equimultiple, *Proc. A.M.S.*, 100, 1987, 260-262.
- [Parusiński] **A. Parusiński**, A generalization of the Milnor number, *Math. Ann.* 281, (1988) 247-254.
- [P-P] **A. Parusiński, P. Pragacz**, A Formula for the Euler characteristic of singular hypersurfaces, *J. Algebraic Geometry* 4 (1995) 337-351.
- [Saito] **M. Saito**, On Steenbrink's Conjecture, *Math. Ann.* 289, (1991), 703-716.
- [Siersma] **D. Siersma**, The monodromy of a series of hypersurface singularities,

- Comment. Math. Helvetici* 65, 1990, 181-197.
- [S-G] **M. G. Soares, P. J. Giblin**, Recognizing singularities of surfaces in  $\mathbb{CP}^3$ , *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.*, 91 (1982), 17-27.
- [Singular] **G.M. Greuel, G. Pfister, H. Schoenemann**, *SINGULAR. A computer algebra system for singularity theory and algebraic geometry*, (version 0.9.0), It is available via anonymous ftp from helios.mathematik.uni-kl.de
- [Schrauwen] **R. Schrauwen**, Deformations and the Milnor number of non isolated plane curve singularities, *Singularity theory and its applications* . Part I, (proceedings, Warwick 1989), Lecture Notes in Math., vol. 1462, (Springer, Berlin, (1991), 276-291.
- [Teissier 1] **B. Teissier**, Cycles Evanescents, Sections Planes et Conditions de Whitney, *Singularités a Cargese 1972*, Asterisque 7-8, Soc. Math. France (1973), 363-391.
- [Teissier 2] **B. Teissier**, Variétés Polaires I, *Inventiones mathematicae* 40, (1977), 267-292.
- [Teissier 3] **B. Teissier**, Résolution simultanée - II. Résolution simultanée et cycles évanescents., *Séminaire sur les Singularités des surfaces*, Lecture Notes in Math., vol. 777, (Springer, Berlin, (1980), 82-146.
- [V-V] **P. Valabrega, G. Valla**, Form Rings and Regular Sequences, *Nagoya Math. J.* Vol.72, (1978), 91-101.
- [Viro] **O.Y. Viro**, Some integral calculus based on Euler characteristic, *Topology and Geometry- Rohlin Seminar* Lecture Notes in Math., vol. 1346, 127-138, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1988.
- [Wells] **R.O. Wells**, *Differential Analysis on Complex Manifolds*, Graduate Text in Math. 65, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1986.
- [Whitney] **H. Whitney**, Tangents to an analytic variety, *Ann. of Math. (2)*, 81 (1964), 496-549.
- [Yau 1] **S.S.T. Yau**, Topological types and multiplicities of isolated quasihomogeneous surface singularities, *Bulletin (New Series) of A.M.S.*, 19,2, (1988), 447-454.
- [Yau 2] **S.S.T. Yau**, Topological type of isolated hypersurfaces singularities, *Recent developments in geometry (Los Angeles CA, 1987)*, Comtemp. Math. 101, (1989), 303-321.
- [Yomdin] **Y.N. Yomdin**, Complex Surfaces with a One-dimensional Set of Singularities, *Sibirskii Math. Zhurnal* 15, 1974, 1061-1082. English Trans.: *Siberian Math. J.* 15 (1974), 5, 1975, 748-762.
- [Zariski] **O. Zariski**, Some open questions in the theory of singularities, *Bulletin of A.M.S.*, 77 (1971), 481-491.